**INSTITUT FÜR THEORETISCHE KERNPHYSIK DER UNIVERSITÄT BONN**
**Nußallee 14–16 D-53115 BONN Telefon: 0228 / 73 23 66**

# Darstellungstheorie der Poincaré-Gruppe

Skriptum nach der Vorlesung

Quantentheorie II

von Prof. D. Schütte

im Sommersemester 1992

Zusammengestellt von

J. Nitschkowski

LaTeX-Satz von

C. Weichmann

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Motivation

Wir haben bisher in der nichtrelativistischen Quantenmechanik die Darstellungstheorie kontinuierlicher Gruppen dazu benutzt, um bestimmte Freiheitsgrade eines quantenmechanischen Systems zu erfassen und zu klassifizieren.

Konkret haben wir zunächst die Aktionen der Drehgruppe auf den Zuständen des Hilbertraumes $L^2(\mathbb{R}^3)$ betrachtet. Mit Hilfe allgemeiner Aussagen über die Darstellungen von Lie-Gruppen und Lie-Algebren haben wir die Darstellung der Drehgruppe über die Drehimpulsoperatoren konstruiert.

Anschließend haben wir diese Darstellung ausreduziert und gesehen, daß sich der Hilbertraum $\mathcal{H}$ schreiben läßt als:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{l=1}^{\infty} \mathcal{H}_l; \quad \mathcal{H}_l = \{\Psi_{lm} | -l \leq m \leq l\}; \quad \dim \mathcal{H}_l = 2l+1$$

[6]

In einem nächsten Schritt haben wir zusätzliche Freiheitsgrade (Spin) eingebaut, indem wir den Hilbertraum $\mathcal{H}$ zu $\mathcal{H}_s$ erweitert haben:

$$\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{C}^{2S+1}$$

Wir haben dann speziell $\mathcal{H}_{1/2}$ betrachtet und ebenfalls die Frage nach (irreduziblen) Darstellungen der Drehgruppe gestellt. Die Antwort war, daß zwar keine Darstellungen aber Strahldarstellungen möglich sind. Die Konstruktion dieser Strahldarstellungen lieferte den Spinoperator S und den Operator des Gesamtdrehimpulses J.

Hier wollen wir nun einige (irreduzible) Darstellungen der Poincaré-Gruppe konstruieren. Wir werden sehen, daß diese Darstellungen bestimmte poincaréinvariante Gleichungen für die Zustände liefern: Die Klein-Gordon- und die Dirac-Gleichung.

# Kapitel 2

# Die Galilei-Gruppe

Wir beginnen damit, zunächst die Wirkung der Galilei-Gruppe auf Zustände, die Lösung der (zeitabhängigen) Schrödingergleichung sind, anzugeben. Allerdings soll hier nicht die gesamte Struktur der Strahl-Darstellung der Galilei-Gruppe diskutiert werden, denn es wird sich zeigen, daß die Galilei-Gruppe auf quantenmechanischen Zuständen komplizierter operiert als die Poincaré-Gruppe, so daß die relativistische (lorentzinvariante) Theorie von diesem Standpunkt aus betrachtet einfacher ist.

Wir gehen von den Lösungen der freien Schrödinger-Gleichung für ein Teilchen ohne Spin aus:

$$-\frac{1}{2m}\Delta\Psi\left(\vec{x},t\right)=\mathrm{i}\dot{\Psi}\left(\vec{x},t\right)$$

Der Einfachheit halber, rechnen wir hier in Einheiten von $\hbar$ (d.h. $\hbar$=1) und c (d.h. c=1. Es gilt allerdings nicht $\hbar$=c, deshalb benutzen wir die umständlichere, korrekte Sprechweise „in Einheiten von…“).

Die Galilei-Gruppe besteht aus den Elementen Translation, Zeittranslation, Rotation und Boost.

Da $\Psi\left(\vec{x},t\right)$ eine skalare Funktion ist, wird man erwarten, daß sich $\Psi$ gemäß der kanonischen Darstellung transformiert:

$\mathcal{G}$ Galilei-Gruppe

$$\forall g\in\mathcal{G}:\left(\rho\left(g\right)\Psi\right)\left(\vec{x},t\right)=\Psi\left(\overset{-1}{g}\,\vec{x},\overset{-1}{g}\,t\right)$$

Andererseits erwartet man, wenn $\Psi\left(\vec{x},t\right)$ Lösung der Schrödinger-Gleichung ist, daß auch $\left(\rho\left(g\right)\Psi\right)\left(\vec{x},t\right)$ Lösung dieser Gleichung ist. Dies aber hat zur Folge, daß $\Psi$ sich bei Boosts nicht gemäß einer kanonischen Darstellung transformiert, wie wir unten sehen werden.

Man findet folgende Darstellung der Galilei-Gruppe:

$$
\begin{array}{llcllcl}
\text{Translation:} & \vec{x}' & = & \vec{x}+\vec{a} & \Psi'(\vec{x},t) & = & \Psi(\vec{x}-\vec{a},t) \\
 & t' & = & t & & & \\[2ex]
\text{Zeittranslation:} & \vec{x}' & = & \vec{x} & \Psi'(\vec{x},t) & = & \Psi(\vec{x},t-\tau) \\
 & t' & = & t+\tau & & & \\[2ex]
\text{Rotation:} & \vec{x}' & = & R\vec{x};\ R\in \mathrm{SO}(3) & \Psi'(\vec{x},t) & = & \Psi(R^{-1}\vec{x},t) \\
 & t' & = & t & & & \\[2ex]
\text{Boost:} & \vec{x}' & = & \vec{x}+\vec{v}t & \Psi'(\vec{x},t) & = & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(m\vec{v}\cdot\vec{x}-\frac{m}{2}v^2 t\right)}\Psi(\vec{x}-\vec{v}t,t) \\
 & t' & = & t & & &
\end{array}
$$

Wir sehen, daß sich Lösungen der Schrödinger-Gleichung unter räumlichen und zeitlichen Translationen, sowie unter Rotationen, gemäß der kanonischen Darstellung transformieren. Bei Boosts muß jedoch ein anderes Transformationsgesetz angewandt werden, da bei der kanonischen Darstellung eine Lösung der Schrödinger-Gleichung nicht wieder in eine Lösung überführt werden könnte.

Sei also <u>zunächst</u> versuchsweise $\Psi'(\vec{x},t)=\Psi(\vec{x}-\vec{v}t,t)$.

Dann ist:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\dot{\Psi}' &= \mathrm{i}\frac{\partial\Psi(\vec{x}',t)}{\partial\vec{x}'}\frac{\partial\vec{x}'}{\partial t}+\mathrm{i}\frac{\partial\Psi(\vec{x}',t)}{\partial t}; \qquad \vec{x}' :\,= \vec{x}-\vec{v}t \\
&= \mathrm{i}\vec{\nabla}_{\vec{x}'}\Psi(\vec{x}',t)\cdot(-\vec{v})+\mathrm{i}\frac{\partial\Psi(\vec{x}',t)}{\partial t} \\
&= -\mathrm{i}\vec{v}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{x}'}\Psi(\vec{x}',t)+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{x}',t)
\end{aligned}
$$

Andererseits:

$$
\begin{aligned}
\Delta_{\vec{x}}\Psi'(\vec{x},t) &= \vec{\nabla}_{\vec{x}}\left(\vec{\nabla}_{\vec{x}}\Psi(\vec{x}',t)\right) \\
&= \vec{\nabla}_{\vec{x}'}\left(\underbrace{\frac{\partial\vec{x}'}{\partial\vec{x}}}_{=1}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{x}'}\Psi(\vec{x}',t)\right) \\
&= \Delta_{\vec{x}'}\Psi(\vec{x}',t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \qquad & -\frac{1}{2m}\Delta\Psi'(\vec{x},t)-\mathrm{i}\dot{\Psi}'(\vec{x},t) = \\
&= -\frac{1}{2m}\Delta_{\vec{x}'}\Psi(\vec{x}',t)-\mathrm{i}\frac{\partial\Psi(\vec{x}',t)}{\partial t}+\mathrm{i}\vec{v}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{x}'}\Psi(\vec{x}',t) \\
&= \mathrm{i}\vec{v}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{x}'}\Psi(\vec{x}',t) \neq 0
\end{aligned}
$$

Daraus folgt: Mit $\Psi(\vec{x},t)$ ist nicht auch $\Psi(\vec{x}-\vec{v}t,t)$ Lösung!

Mit $\Psi'(\vec{x},t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(m\vec{v}\cdot\vec{x}-\frac{m}{2}v^2t\right)}\Psi(\vec{x}-\vec{v}t,t)$ erhält man stattdessen

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\dot{\Psi}' &= \left(-\mathrm{i}\vec{v}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{x}'}\Psi(\vec{x}',t)\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(m\vec{v}\cdot\vec{x}-\frac{m}{2}v^2t\right)} + \\
&\quad + \left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{x}',t)\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(m\vec{v}\cdot\vec{x}-\frac{m}{2}v^2t\right)} + \\
&\quad + \left(\frac{m}{2}v^2\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(m\vec{v}\cdot\vec{x}-\frac{m}{2}v^2t\right)}\Psi(\vec{x}',t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{und } \vec{\nabla}_{\vec{x}}\left(\Psi(\vec{x}',t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(m\vec{v}\cdot\vec{x}-\frac{m}{2}v^2t\right)}\right) &= \left(\vec{\nabla}_{\vec{x}'}\Psi(\vec{x}',t)\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(m\vec{v}\cdot\vec{x}-\frac{m}{2}v^2t\right)} \\
&\quad + \mathrm{i}m\vec{v}\Psi(\vec{x}',t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(m\vec{v}\cdot\vec{x}-\frac{m}{2}v^2t\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{\vec{x}'}\Psi'(\vec{x},t) &= -m^2v^2\Psi(\vec{x}',t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(m\vec{v}\cdot\vec{x}-\frac{m}{2}v^2t\right)} + \\
&\quad + 2\left(\mathrm{i}m\vec{v}\right)\left(\vec{\nabla}_{\vec{x}'}\Psi(\vec{x}',t)\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(m\vec{v}\cdot\vec{x}-\frac{m}{2}v^2t\right)} + \\
&\quad + \left(\Delta_{\vec{x}'}\Psi(\vec{x}',t)\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(m\vec{v}\cdot\vec{x}-\frac{m}{2}v^2t\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow -\frac{1}{2m}\Delta_{\vec{x}'}\Psi'(\vec{x},t) - \mathrm{i}\dot{\Psi}'(\vec{x},t) &= \frac{m}{2}v^2\Psi(\vec{x}',t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(m\vec{v}\cdot\vec{x}-\frac{m}{2}v^2t\right)} - \\
&\quad - \mathrm{i}\vec{v}\left(\vec{\nabla}_{\vec{x}'}\Psi(\vec{x}',t)\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(m\vec{v}\cdot\vec{x}-\frac{m}{2}v^2t\right)} - \\
&\quad - \frac{1}{2m}\left(\Delta_{\vec{x}'}\Psi(\vec{x}',t)\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(m\vec{v}\cdot\vec{x}-\frac{m}{2}v^2t\right)} - \\
&\quad - \mathrm{i}\frac{\partial\Psi(\vec{x}',t)}{\partial t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(m\vec{v}\cdot\vec{x}-\frac{m}{2}v^2t\right)} + \\
&\quad + \mathrm{i}\vec{v}\cdot\left(\vec{\nabla}_{\vec{x}'}\Psi(\vec{x}',t)\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(m\vec{v}\cdot\vec{x}-\frac{m}{2}v^2t\right)} - \\
&\quad - \frac{m}{2}v^2\Psi(\vec{x}',t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(m\vec{v}\cdot\vec{x}-\frac{m}{2}v^2t\right)} \\
&= \underbrace{\left[-\frac{1}{2m}\Delta_{\vec{x}'}\Psi(\vec{x}',t) - \mathrm{i}\dot{\Psi}(\vec{x}',t)\right]}_{=0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(m\vec{v}\cdot\vec{x}-\frac{m}{2}v^2t\right)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß das Transformationsgesetz für Boosts richtig ist.

Nun wissen wir aber, daß die Galilei-Transformationen nicht die richtigen Transformationen zwischen Inertialsystemen sind. Denn die Maxwellschen Gleichungen der Elektrodynamik — die experimentell bestätigt sind und als gesichert angesehen werden dürfen — sind nicht galileiinvariant! Dieser Umstand veranlaßte Einstein dazu, nach einem Transformationsgesetz zu suchen, das die Maxwell-Gleichungen invariant läßt. Die Lösung dieses Problems ist heute als Lorentztransformation (besser: Lorentzboost) bekannt.

# Kapitel 3

# Die Lorentz- und die Poincaré-Gruppe

Die Lorentztransformationen lauten:

$$\begin{aligned}
\vec{x}' &= \vec{x} + \frac{\gamma - 1}{v^2}\vec{v}\,(\vec{v}\cdot\vec{x}) - \gamma\vec{v}t \\
t' &= \gamma\left(t - \frac{\vec{v}\cdot\vec{x}}{c^2}\right) \\
\text{mit: } \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}
\end{aligned}$$

Nimmt man zu diesem Boost-Gesetz die Raum- und Zeit-Translationen und -Spiegelungen sowie die Rotation hinzu, so erhält man anstelle der Galilei-Gruppe eine neue Symmetriegruppe. Diese wird als Poincaré-Gruppe bezeichnet.

Bevor wir die Wirkung der Poincaré-Gruppe auf quantenmechanische Zustände diskutieren, betrachten wir zunächst die Struktur dieser Gruppe:

Die Poincaré-Gruppe operiert im $\mathbb{R}^4$ mit der Lorentz-Metrik $g(\cdot,\cdot)$.

Das Paar $\mathbb{M} := (\mathbb{R}^4, g(\cdot,\cdot))$ bezeichnet man als Minkowski-Raum.

Es ist: $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4$ mit $\boldsymbol{x} = (x^0, \vec{x})$; $x^0 := tc$; $\vec{x}\in\mathbb{R}^3$

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) := \left(x^0\right)^2 - |\vec{x}|^2 = \left(x^0\right)^2 - \sum_{k=1}^{3} x_k^2 = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$$

$$\text{dabei ist } g_{\mu\nu} \text{ die } 4\times 4\text{-Matrix } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Bitte beachten Sie, daß wir hier und im Folgenden die Einsteinsche Summenkonvention verwenden. Über Indizes, die in einem Produkt sowohl ko- als auch kontravariant auftreten (also einmal unten und einmal oben) wird summiert. Die Summation läuft dabei für lateinische Indizes von 1 bis 3 und für griechische von 0 bis 3.

Wir können nun die Elemente der Poincaré-Gruppe $\mathcal{P}$ (und der darin enthaltenen Lorentz-Gruppe $\mathcal{L}$) allgemein charakterisieren:

$\lambda \in \mathcal{L} :\Leftrightarrow \Lambda : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$, so daß $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{M} : \quad g\left(\Lambda \boldsymbol{x}, \Lambda \boldsymbol{x}\right) = g\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\right)$.

$A \in \mathcal{P} :\Leftrightarrow \exists \boldsymbol{a} \in \mathbb{M}\ \exists \Lambda \in \mathcal{L}$, so daß $A(\boldsymbol{x}) = \Lambda \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$.

Anders formuliert: Die Elemente der Poincaré-Gruppe setzen sich zusammen aus allgemeinen Lorentztransformationen (die isometrisch bzgl. $g$ sind) und Raum-Zeit-Translationen.

Man kann nun jedes Element der Lorentzgruppe (also jede Isometrie $\Lambda$) durch folgenden (hier nicht bewiesenen) Satz darstellen:

$$\forall \Lambda \text{ mit } g\left(\Lambda \boldsymbol{x}, \Lambda \boldsymbol{x}\right) = g\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\right) \quad \exists \nu_1, \nu_2 \in \{0,1\}\,; v \in \mathbb{R}; R_1, R_2 \in \mathrm{SO}\,(3)$$

so daß:

$$\Lambda = R_1 L_0\,(v)\, R_2 P^{\nu_1} T^{\nu_2}$$

dabei ist $P$ die <u>Paritätsoperation</u>:

$$\begin{aligned} P\vec{x} &= -\vec{x} \\ Pt &= t \end{aligned}$$

und $T$ die <u>Zeitspiegelung</u>:

$$\begin{aligned} T\vec{x} &= \vec{x} \\ Tt &= -t \end{aligned}$$

$L_0\,(v)$ ist:

$$L_0\,(v) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir können nun, da wir festgelegt haben, wie die Poincaré-Transformationen im Minkowski-Raum wirken, beginnen die Darstellungen der Poincaré-Gruppe auf quantenmechanischen Zuständen zu diskutieren.e Allerdings beschränken wir uns dabei auf die Darstellungen der Zusammenhangskomponente, die aus den Transformationen mit $\nu_i = 0$ besteht. Da die Darstellung der Zeitumkehr nur antiuntitär erfolgen kann, und eine Betrachtung dieser diskreten Transformationen nur unnötige Schwierigkeiten mit sich bringt, ohne wesentlich zur Erhellung beizutragen.

Zunächst betrachten wir den Fall einer skalaren Funktion (d.h. eines freien Teilchens mit Spin 0). Anschließend erweitern wir die Darstellung auf ein freies Einteilchenproblem mit Spin 1/2.

# Kapitel 4

# Darstellung der Poincaré-Gruppe für Spin 0 — die Klein-Gordon-Gleichung.

Analog zur Schrödinger-Gleichung gehen wir auch hier von skalaren Funktionen aus. Wir werden — im Gegensatz zum Schrödinger-Fall — eine Darstellung der Poincaré-Gruppe <u>definieren</u> und die Bewegungsgleichung <u>anschließend</u> aus der Forderung nach der Invarianz der Zustände erhalten.

Man könnte sich nun fragen, warum wir ein solches Vorgehen nicht angewendet haben, um aus der Galilei-Gruppe die Schrödinger-Gleichung zu deduzieren. Der Grund dafür ist, daß die Galilei-Gruppe nicht so einfach wie die Lorentzgruppe zu behandeln ist. So kann man zeigen, daß von der Galilei-Gruppe selbst <u>keine</u> Darstellung existiert, die mit der Schrödinger-Gleichung kompatibel ist. Erst durch hinzunehmen bestimmter, mit allen Elementen der Galilei-Gruppe kommutierender Elemente („zentrale Erweiterung“) läßt sich eine Strahl(!)-Darstellung angeben, die dann auch den Phasenfaktor bei der Wirkung der Boosts auf Zustände ergibt.

Sei also $\phi: \begin{array}{ccc} \mathbb{M} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ \boldsymbol{x} & \mapsto & \phi(\boldsymbol{x}) \end{array}$ und $\boldsymbol{x}' = A \cdot \boldsymbol{x} = \Lambda \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$ mit $A \in \mathcal{P}$ gegeben.

Dann erklären wir eine Darstellung von $A$ durch

$$\phi'(\boldsymbol{x}') = \phi(\boldsymbol{x})$$

oder:

$$(\rho(A)\,\phi)(\boldsymbol{x}) = \phi\left(\overset{-1}{A}\,\boldsymbol{x}\right) \text{ siehe auch Kapitel 2 in [7]}$$

Mit $\boldsymbol{x}' = \Lambda \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} = A\boldsymbol{x}$ folgt:

$$\boldsymbol{x} = \overset{-1}{\Lambda}(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{a}) = \overset{-1}{A}\,\boldsymbol{x}'$$

$$\Rightarrow \boxed{(\rho(A)\,\phi)(\boldsymbol{x}) = \phi\left(\overset{-1}{\Lambda}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})\right)}$$

Man weist leicht nach, daß $\rho(A)$ tatsächlich eine Darstellung von $A \in \mathcal{P}$ ist, daß also gilt:

$$\rho(\mathbb{1}) = \mathbb{1}, \quad \rho(A_1 A_2) = \rho(A_1)\,\rho(A_2)$$

Wir wollen nun die Bewegungsgleichungen konstruieren, so daß die Darstellung von $\mathcal{P}$ bei Anwendung auf eine transformierte Lösung dieser Bewegungsgleichungen wieder eine Lösung ergibt, d.h. wir verlangen folgenden Zusammenhang:

$K$ sei (invarianter) Operator, $\phi(\boldsymbol{x})$ eine Lösung der Gleichung:

$$K\phi(\boldsymbol{x}) = 0$$

dann soll auch $(\rho(A)\phi)(\boldsymbol{x})$ mit $A \in \mathcal{P}$ wieder eine Lösung sein.

Diese Bedingung ist sicher dann erfüllt, wenn $K$ <u>invariant</u> unter Poincaré-Transformationen ist, wenn also gilt:

$$\forall A \in \mathcal{P} : \quad \rho(A)\, K = K \rho(A)$$

also $[K, \rho(A)] = 0$, bzw. $(\rho(A))^{-1} K \rho(A) = K$.

Denn aus $K\phi(\boldsymbol{x}) = 0$ folgt sofort:

$$\forall A \in \mathcal{P} : \quad K\,(\rho(A)\,\phi)(\boldsymbol{x}) \overset{[K,\rho(A)]=0}{=} (\rho(A)\,K\phi)(\boldsymbol{x}) \overset{K\phi(\boldsymbol{x})=0}{=} 0$$

Um unsere Forderung zu erfüllen müssen wir also poincaréinvariante Operatoren suchen.

Bei der Annahme einer skalaren Funktion stehen nur Vielfache folgender Operatoren zur Verfügung:

$$\begin{array}{rl} \mathbb{1} & \\ x^\mu & 4-\text{Ortsoperator} \\ p^\mu = -\,\mathrm{i}\partial_\mu = -\,i\frac{\partial}{\partial x^\mu} & 4-\text{Impulsoperator} \end{array}$$

dabei ist

$$\begin{aligned} p^0 &= -\mathrm{i}\partial_0 = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} \\ p^i &= -\mathrm{i}\partial_i = -\mathrm{i}\vec{\nabla}_i \end{aligned}$$

Man kann nun aus den angegebenen Operatoren poincaréinvariante Operatoren konstruieren:

$\mathbb{1}$ ist bereits poincaréinvariant, denn:

$$\rho(A) \cdot \mathbb{1} = \rho(A) = \mathbb{1} \cdot \rho(A)$$

$\boldsymbol{x}^2 = x^\mu x_\mu$ ist <u>nicht</u> poincaréinvariant, da bei Raum-Zeit-Translationen $x'^\mu = x^\mu + a^\mu$ gilt:

$$x'^\mu x'_\mu = (x^\mu + a^\mu)(x_\mu + a_\mu) = \boldsymbol{x}^2 + 2x^\mu a_\mu + \boldsymbol{a}^2 \neq \boldsymbol{x}^2 \;\; \text{falls } a_\mu \neq 0$$

Ebenso ist auch $p^\mu x_\mu$ nicht poincaréinvariant:

$x'_\mu = x_\mu + a_\mu$, $p'_\mu = -\,\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = -\,\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x^\mu} = p_\mu$

$$\Rightarrow p'^\mu x'_\mu = (-\mathrm{i}\partial^\mu)(x_\mu + a_\mu) = -\mathrm{i} + (x_\mu + a_\mu)(-\mathrm{i}\partial^\mu) = -\mathrm{i} + x'_\mu p^\mu$$

Allerdings ist $p^\mu p_\mu$ poincaréinvariant, da das Produkt translations- und lorentzinvariant ist.

Es ist zu beachten, daß bei den obigen Überlegungen die Poincaréinvarianz und nicht nur die Lorentzinvarianz gefordert wurde. $p^\mu x_\mu$ und $x^\mu x_\mu$ sind natürlich lorentzinvariant. Da sie jedoch nicht invariant unter Raum-Zeit-Translationen sind, erfüllen sie nicht die Forderung nach Poincaré-Invarianz!

Wir haben also nur zwei poincaréinvariante Operatoren gefunden:

Nämlich: $\mathbb{1}$ und $p^\mu p_\mu$ und es liegt nahe, als allgemeinsten Operator die Summe dieser beiden anzusetzen. Dabei muß $\mathbb{1}$ mit einem Massenquadrat $m^2$ multipliziert werden, da $p^\mu p_\mu$ die Dimension eines Massenquadrats hat.

Damit können wir den allgemeinen invarianten Operator bis zur 2. Ordnung in $p$ angeben:

$$K = p^\mu p_\mu - m^2$$

Mit: $p^\mu p_\mu = (-\mathrm{i}\partial^\mu)(-\mathrm{i}\partial_\mu) = -\partial^\mu \partial_\mu = -(\partial^0\partial_0 + \partial^i\partial_i) = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta = -\Box$ folgt:

$$K = -\Box - m^2$$

, beziehungsweise wir erhalten als invariante Gleichung (das Vorzeichen wird durch die spätere Interpretation festgelegt):

$$\boxed{\left(\Box + m^2\right)\phi\left(\boldsymbol{x}\right) = 0} \tag{4.1}$$

Das ist die Klein-Gordon-Gleichung.

Wir werden nun wie folgt verfahren:

Zunächst werden wir ein poincaréinvariantes Skalarprodukt einführen, um den Raum der Lösungen zu (4.1) zu einem Hilbertraum zu machen. Anschließend können wir dann die Darstellung $\rho$ der Poincaré-Gruppe in diesem Hilbertraum ausreduzieren. Zu diesem Zwecke werden wir den Hilbertraum in eine direkte Summe invarianter Unterräume zerlegen.

Für das Skalarprodukt wird zusätzlich verlangt, daß $\rho(A)$ unitär bezüglich dieses Skalarproduktes ist. (Die Norm eines Teilchens soll unabhängig vom Bezugssystem sein, ähnlich wie schon in [7]). Bei der Konstruktion dieses Skalarproduktes können wir uns am nichtrelativistischen (Galilei-invarianten) Fall orientieren. Wir hatten bei der Diskussion der (zeitabhängigen) Schrödingergleichung eine Dichte $\rho$ und einen Strom $\vec{\jmath}$ gefunden, die folgende explizite Gestalt hatten:

$$\begin{aligned}
\rho(\vec{x},t) &= \Psi^*(\vec{x},t)\,\Psi(\vec{x},t) \\
\vec{\jmath}(\vec{x},t) &= \tfrac{1}{2m\mathrm{i}}\left[\Psi^*(\vec{x},t)\,\vec{\nabla}\Psi(\vec{x},t) - \vec{\nabla}\Psi^*(\vec{x},t)\,\Psi(\vec{x},t)\right]
\end{aligned}$$

und die die Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho} + \operatorname{div}\vec{\jmath} = 0$$

erfüllen, wenn $\Psi$ eine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\dot{\Psi}(\vec{x},t) &= H\Psi(\vec{x},t) \\
H &= -\tfrac{1}{2m}\Delta + V(\vec{x})
\end{aligned}$$

ist.

Das Skalarprodukt war dann gegeben durch:

$$\langle \Psi, \Phi \rangle := \int \Psi^* (\vec{x}, t)\, \Phi (\vec{x}, t)\, \mathrm{d}^3 x \; = \int \mathrm{d}^3 x\, \rho (\vec{x}, t) =: Q$$

Nun wissen wir aus der Elektrodynamik, daß sich dort die Ladungsdichte $\rho$ und die Stromdichte $\vec{\jmath}$ zu einem lorentz-kovarianten 4-Vektor $\boldsymbol{j} = (\rho, \vec{\jmath})$ zusammenfassen lassen. Die Ladungsdichte war dann die 0-Komponente $j^0$ des 4-Vektors $\boldsymbol{j}$.

Dies legt nun nahe, auch im Fall der Klein-Gordon-Gleichung nach einem Strom $\vec{\jmath}$ und einer Dichte $\rho$ zu suchen, die aber hier die Raum-, bzw. 0-Komponenten einer 4-Stromdichte sind! Wir verlangen also von unserem 4-Strom $j^\mu$ die Lorentz-Kovarianz:

$$j'^\mu (\boldsymbol{x}) = j^\mu [\Psi'] (\boldsymbol{x}) = \Lambda^\mu{}_\nu j^\nu \left( \overset{-1}{\Lambda}\, \boldsymbol{x} \right)$$

sowie die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

falls die $\phi$, aus denen $\boldsymbol{j}$ konstruiert ist, die Klein-Gordon-Gleichung erfüllen.

Haben wir ein solches $\boldsymbol{j}$ gefunden, so werden wir versuchen, $j^0$ zur Definition des Skalarproduktes heranzuziehen, gemäß

$$\langle \phi, \phi \rangle := \int\limits_{t=0} j^0 [\phi]\, \mathrm{d}^3 x \tag{4.2}$$

dabei ist mit $j^0 [\phi]$ angedeutet, daß $j^0$ von der Funktion $\phi$ abhängt.

Damit das Verfahren konsistent ist, muß noch gezeigt werden, daß (4.2) poincaréinvariant ist, also daß das Integral in allen Bezugssystemen den gleichen Wert hat.

Dazu werden wir aber nicht von obigem Integral ausgehen, sondern wir werden zeigen, daß sich dieses Integral als Spezialfall eines allgemeiner formulierten Integrals ergibt.

Wir beweisen also zunächst den allgemeiner formulierten Sachverhalt und zeigen dann, daß sich $Q$ als Spezialfall ergibt.

Sei also $\sigma$ eine 3-dimensionale Hyperfläche des 4-dimensionalen Minkowski-Raumes.

Sei ferner $\sigma$ durch das Tripel von Koordinaten $(u, v, w)$ parametrisiert:

$$\sigma := \{ x^\mu | x^\mu (u, v, w) \}$$

Dann definieren wir ein Hyperflächenelement $\mathrm{d}\sigma_\mu$ durch:

$$\mathrm{d}\sigma_\mu (\boldsymbol{x}) := \epsilon_{\mu\nu\rho\tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial u} \frac{\partial x^\rho}{\partial v} \frac{\partial x^\tau}{\partial w} \mathrm{d}u \mathrm{d}v \mathrm{d}w$$

Nun überschieben wir mit dem 4-Strom $j^\mu (\boldsymbol{x})$ und bilden den Ausdruck

$$*j (\boldsymbol{x}) := j^\mu (\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\sigma_\mu (\boldsymbol{x})$$

Wir untersuchen nun das Transformationsverhalten von $*j (\boldsymbol{x})$:

Es sei $*j'(\boldsymbol{x}) = j'^{\mu}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\sigma_\mu(\boldsymbol{x})$ Dann ist:

$$\begin{aligned} *j'(\boldsymbol{x}) &= j'^{\mu}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\sigma_\mu(\boldsymbol{x}) \\ &= \Lambda^{\mu}{}_{\kappa} j^{\kappa}\left(\overset{-1}{\Lambda}\boldsymbol{x}\right)\epsilon_{\mu\nu\rho\tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial u}\frac{\partial x^\rho}{\partial v}\frac{\partial x^\tau}{\partial w}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \\ \text{mit}\begin{pmatrix} \boldsymbol{y} & = & \Lambda^{-1}\boldsymbol{x} \\ & \Updownarrow & \\ \boldsymbol{x} & = & \Lambda\boldsymbol{y}\end{pmatrix} &= j^{\kappa}(\boldsymbol{y})\,\epsilon_{\mu\nu\rho\tau}\Lambda^{\mu}{}_{\kappa}\Lambda^{\nu}{}_{\alpha}\Lambda^{\rho}{}_{\beta}\Lambda^{\tau}{}_{\gamma}\frac{\partial y^\alpha}{\partial u}\frac{\partial y^\beta}{\partial v}\frac{\partial y^\gamma}{\partial w}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu\nu\rho\tau}\Lambda^{\mu}{}_{\kappa}\Lambda^{\nu}{}_{\alpha}\Lambda^{\rho}{}_{\beta}\Lambda^{\tau}{}_{\gamma} &= |\det\Lambda|\,\epsilon^{\kappa\alpha\beta\gamma} \\ &= |\det\Lambda|\,\epsilon_{\kappa\alpha\beta\gamma} \end{aligned}$$

denn die Summation über $(\mu,\nu,\rho,\tau)$ ergibt eine Linearkombination aus Produkten der $\Lambda$-Matrixelemente. Dieser Ausdruck ist aber noch in den verbleibenden Indizes $(\kappa\alpha\beta\gamma)$ antisymmetrisch, daher gilt:

$$\det\Lambda_{[\kappa,\alpha,\beta,\gamma]} = |\det\Lambda|\cdot\epsilon_{\kappa,\alpha,\beta,\gamma}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\quad *j'(\boldsymbol{x}) &= j^{\kappa}(\boldsymbol{y})\,\epsilon_{\kappa\alpha\beta\gamma}\,|\det\Lambda|\,\frac{\partial y^\alpha}{\partial u}\frac{\partial y^\beta}{\partial v}\frac{\partial y^\gamma}{\partial w}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \\ &= j^{\kappa}(\boldsymbol{y})\,\epsilon_{\kappa\alpha\beta\gamma}\,|\det\Lambda|\,\frac{\partial y^\alpha}{\partial u}\frac{\partial y^\beta}{\partial v}\frac{\partial y^\gamma}{\partial w}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \\ (\text{da }\ |\det\Lambda| = 1) &= j^{\kappa}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\sigma_\kappa(\boldsymbol{y}) \;=\; *\,j(\boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

Also:

$$\boxed{*\,j'(\boldsymbol{x}) = j^{\kappa}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\sigma_\kappa(\boldsymbol{y}) = *j(\boldsymbol{y})}\qquad \text{mit } \boldsymbol{y} = \overset{-1}{\Lambda}\boldsymbol{x}$$

Wir zeigen nun, daß — unter der Voraussetzung, daß $j(\boldsymbol{x})$ die Kontinuitätsgleichung erfüllt — gilt:

$$\int_\sigma *j'(\boldsymbol{x}) = \int_\sigma *j(\boldsymbol{x})$$

<u>Bew.:</u> Es ist:

$$\int_\sigma *j'(\boldsymbol{x})\left[=\int_\sigma j'^{\mu}(\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}\sigma'_\mu(\boldsymbol{x}')\right] = \int_{\overline{\sigma}} j^{\mu}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\sigma_\mu(\boldsymbol{y})$$

Beachte, daß hier bei $\boldsymbol{y}=\Lambda^{-1}\boldsymbol{x}$ auch $\sigma$ mittransformiert wird.

Nun ist

$$\begin{aligned} \Delta Q \;:&= \int_{\overline{\sigma}} j^{\mu}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\sigma_\mu(\boldsymbol{y}) - \int_\sigma j^{\mu}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\sigma_\mu(\boldsymbol{x}) \\ &= \int_{\overline{\sigma}} j^{\mu}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\sigma_\mu(\boldsymbol{x}) - \int_\sigma j^{\mu}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\sigma_\mu(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

Betrachte zunächst eine <u>endliche</u> Hyperfläche $\sigma$. Dann läßt sich $\Delta Q$ schreiben als:

$$\Delta Q = \int\limits_{\partial V_4} j^\mu(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\sigma_\mu(\boldsymbol{x}) - \int\limits_{\partial V_4 \setminus \{\sigma, \overline{\sigma}\}} j^\mu(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\sigma_\mu(\boldsymbol{x})$$

(siehe Abbildung 4.1).

Dabei ist $\partial V_4$ ein 3-dimensionaler Rand eines 4-dimensionalen Volumens, der beim Hinzunehmen einiger Randflächen entsteht. Da aber die zusätzlichen Randflächen neben $\sigma$ und $\overline{\sigma}$ einen Beitrag leisten, muß dieser wieder abgezogen werden, dies wird durch das 2. Integral erreicht. Siehe auch Abb. 4.1!

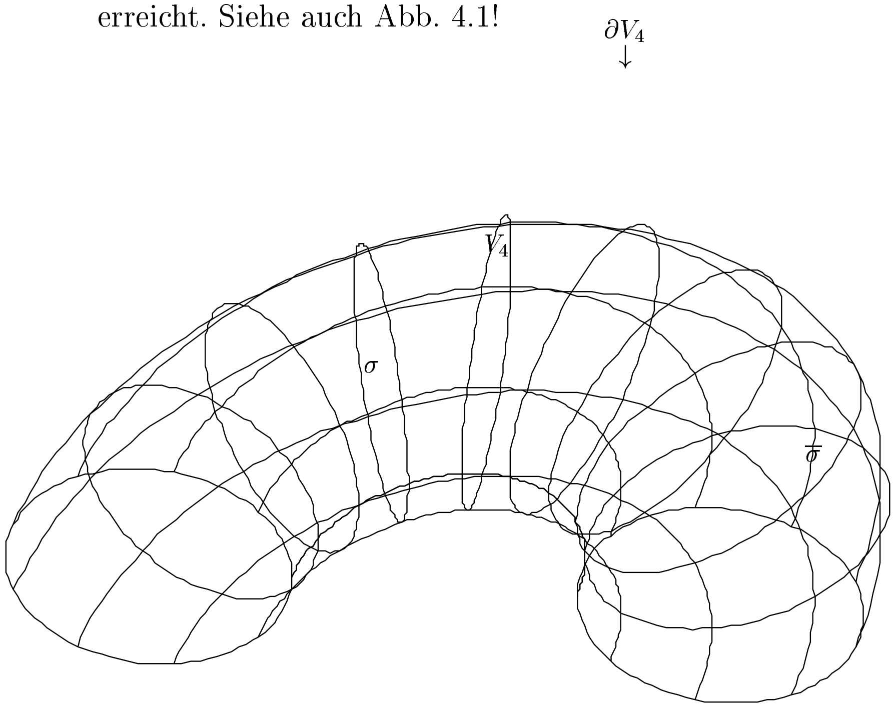


Abbildung 4.1: Bezeichnungen für die Integration

$$\Delta Q = \int\limits_{\partial V_4} j^\mu(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\sigma_\mu(\boldsymbol{x}) - \int\limits_{\partial V_4 \setminus \{\sigma, \overline{\sigma}\}} j^\mu(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\sigma_\mu(\boldsymbol{x})$$

Nun gilt der Stokessche Satz

$$\int\limits_{\partial V_4} j^\mu(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\sigma_\mu(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{V_4} \partial_\mu j^\mu(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}^4 x$$

[In der Sprache der Differentialformen ist dies

$$\int\limits_{\partial V_4} *j(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{V_4} \mathrm{d} * j(\boldsymbol{x})$$

wobei $*j(\boldsymbol{x})$ eine 3-Form auf $\mathbb{R}^4$ ist und unser oben definiertes $*j(\boldsymbol{x})$ ist eine solche 3-Form!]

Damit haben wir

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \int\limits_{V_4} \underbrace{\partial_\mu j^\mu(\boldsymbol{x})}_{=0^{(\mathrm{i})}} \mathrm{d}^4x - \int\limits_{\partial V_4 \setminus \{\sigma,\overline{\sigma}\}} j^\mu(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\sigma_\mu(\boldsymbol{x}) \\ \Rightarrow \Delta Q &= -\int\limits_{\partial V_4 \setminus \{\sigma,\overline{\sigma}\}} j^\mu(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\sigma_\mu(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

Läßt man nun <u>unendlich</u> ausgedehnte Hyperflächen zu, so verschwindet $j^\mu(\boldsymbol{x})$ auf $\partial V_4 \setminus \{\sigma,\overline{\sigma}\}$ bei genügend großem 4-Volumen $V_4$ (dies folgt aus der geforderten Normierbarkeit von $\phi(\boldsymbol{x})$, aus dem sich $j_\mu(\boldsymbol{x})$ berechnet).

$\Rightarrow\ \Delta Q = 0$ für große (unendlich ausgedehnte) Hyperflächen.

$$\begin{aligned} \int\limits_{\overline{\sigma}} *j(\boldsymbol{x}) &= \int\limits_{\sigma} *j(\boldsymbol{x}) \\ \int\limits_{\sigma} *j'(\boldsymbol{x}) &= \int\limits_{\sigma} *j(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ausgeschrieben lautet:

$$\int\limits_{\sigma} j'^\mu(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\sigma_\mu(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\sigma} j^\mu(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\sigma_\mu(\boldsymbol{x})$$

Wählt man nun eine Hyperfläche $t=0$ und die Parametrisierung:

$$u = x^1; \quad v = x^2; \quad w = x^3$$

dann folgt:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma_\mu(\boldsymbol{x}) &= \epsilon_{\mu 123}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 \\ \Rightarrow\ j^\mu(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\sigma_\mu(\boldsymbol{x}) &= j^0(\boldsymbol{x})\underbrace{\epsilon_{0123}}_{=1}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 = j^0(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}^3x \end{aligned}$$

und wir erhalten:

$$\boxed{\int\limits_{t=0} j'^0(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}^3x = \int\limits_{t=0} j^0(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}^3x}$$

Durch die nichtrelativistische Quantenmechanik motiviert, setzen wir für $j^\mu(\boldsymbol{x})$ an:

$$j^\mu(\boldsymbol{x}) = \mathrm{i}\left[\phi^*(\boldsymbol{x})\,\partial^\mu\phi(\boldsymbol{x}) - \left(\partial^\mu\phi^*(\boldsymbol{x})\right)\phi(\boldsymbol{x})\right]$$

dabei soll $\phi(\boldsymbol{x})$ der Klein-Gordon-Gleichung genügen:

$$\left(\Box + m^2\right)\phi(\boldsymbol{x}) = 0$$

(i) da $j^\mu$ nach Voraussetzung die Kontinuitätsgleichung erfüllt.

dann gilt auch durch Konjugation:

$$\left(\Box + m^2\right) \phi^* (\boldsymbol{x}) = 0$$

(da $m^2$ und $\Box$ reell sind).

Wir kontrollieren, ob $j^\mu$ die Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu (\boldsymbol{x}) = 0$ erfüllt.

Es ist:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu j^\mu (\boldsymbol{x}) &= \mathrm{i}\partial_\mu \left[\phi^* (\boldsymbol{x})\, \partial^\mu \phi (\boldsymbol{x}) - (\partial^\mu \phi^* (\boldsymbol{x}))\, \phi (\boldsymbol{x})\right] \\
&= \mathrm{i} \left[(\partial_\mu \phi^* (\boldsymbol{x}))\, \partial^\mu \phi (\boldsymbol{x}) + \phi^* (\boldsymbol{x})\, \partial_\mu \partial^\mu \phi (\boldsymbol{x}) - \right. \\
&\quad \left. - (\partial_\mu \partial^\mu \phi^* (\boldsymbol{x}))\, \phi (\boldsymbol{x}) - (\partial^\mu \phi^* (\boldsymbol{x}))\, \partial_\mu \phi (\boldsymbol{x})\right] \\
&= \mathrm{i} \left[\phi^* (\boldsymbol{x})\, \Box \phi (\boldsymbol{x}) - (\Box \phi^* (\boldsymbol{x}))\, \phi (\boldsymbol{x})\right] \\
&= \mathrm{i} \left[\phi^* (\boldsymbol{x}) \left(-m^2 \phi (\boldsymbol{x})\right) - \left(-m^2 \phi^* (\boldsymbol{x})\right) \phi (\boldsymbol{x})\right] \\
\Big(\text{da } \left(\Box + m^2\right) \phi (\boldsymbol{x}) = 0 &\rightsquigarrow \Box \phi (\boldsymbol{x}) = -m^2 \phi (\boldsymbol{x}) \text{ analoges gilt für } \phi^* (\boldsymbol{x})\Big) \\
&= \mathrm{i} \left[-m^2 \phi^* (\boldsymbol{x})\, \phi (\boldsymbol{x}) + m^2 \phi^* (\boldsymbol{x})\, \phi (\boldsymbol{x})\right] = 0
\end{aligned}$$

Der so definierte Strom erfüllt also die Kontinuitätsgleichung.

Ferner gilt: $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ und $\phi (\boldsymbol{x}) \to \phi' (\boldsymbol{x}')$

$$\begin{aligned}
j'^\mu (\boldsymbol{x}') &= \mathrm{i} \left[\phi'^* (\boldsymbol{x}')\, \partial'^\mu \phi' (\boldsymbol{x}') - (\partial'^\mu \phi'^* (\boldsymbol{x}'))\, \phi' (\boldsymbol{x}')\right] \\
&= \mathrm{i} \left[\phi^* (\boldsymbol{x})\, \Lambda^\mu{}_\nu \partial^\nu \phi (\boldsymbol{x}) - \left(\Lambda^\mu{}_\nu \partial^\nu \phi^* (\boldsymbol{x})\right) \phi (\boldsymbol{x})\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow \quad j'^\mu (\boldsymbol{x}') &= \Lambda^\mu{}_\nu \left\{\mathrm{i} \left[\phi^* (\boldsymbol{x})\, \partial^\nu \phi (\boldsymbol{x}) - (\partial^\nu \phi^* (\boldsymbol{x}))\, \phi (\boldsymbol{x})\right]\right\} \\
&= \Lambda^\mu{}_\nu j^\nu (\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

$$\text{oder: } j'^\mu (\boldsymbol{x}) = \Lambda^\mu{}_\nu j^\nu \left(\overset{-1}{\Lambda}\, \boldsymbol{x}\right)$$

d.h. unser oben definierter 4-Strom transformiert sich tatsächlich unter Lorentztransformation wie ein 4-Vektor, so daß auch die Voraussetzung für die Invarianz von $\int \mathrm{d}^3 x\, j^0 [\phi]$ erfüllt ist.

Mit diesem Strom können wir über die 0.-Komponente ein Skalarprodukt auf dem Raum der Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung gewinnen. Dies wird im nächsten Kapitel ausgeführt, zunächst wird jedoch ein nichtrelativistisch motiviertes Skalarprodukt (bzw. Norm) diskutiert.

Dazu lösen wir zunächst die (freie) Klein-Gordon-Gleichung, untersuchen, wie oben angemerkt, zwei verschiedene Normen und führen dann ein Skalarprodukt ein. Damit zerlegen wir die Lösung in Anteile mit positiver, beziehungsweise negativer Energie und zeigen, daß es Hilberträume $\mathcal{H}_+$ und $\mathcal{H}_-$ gibt, die invariante Unterräume unter der Darstellung der Poincaré-Gruppe sind.

# Kapitel 5

# Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung — die Ausreduktion der Darstellung

Wir haben im letzten Kapitel die freie Klein-Gordon-Gleichung aufgestellt:

$$\left(\Box + m^2\right) \phi\left(\boldsymbol{x}\right) = 0 \tag{(4.1)}$$

nun wollen nun die Lösungen dieser Gleichung bestimmen. Dazu setzen wir $\phi\left(\boldsymbol{x}\right)$ durch eine Fouriertransformation an und bestimmen die Lösungen im Impulsraum. Die Ortsraum-Lösungen erhalten wir durch die inverse Fouriertransformation der Impulsraum-Lösung.

Da bei der Lösung dieses Problems $\delta$-Distributionen auf dem Lichtkegel vorkommen, sei der Hinweis angebracht, daß mathematisch saubere Distributionslösungen der Klein-Gordon-Gleichung hier nicht angestrebt werden. Der interessierte Leser findet diese beispielsweise in [1].

Wir machen den Ansatz:

$$\phi\left(\boldsymbol{x}\right) = \int \mathrm{d}^4 k\, h\left(\boldsymbol{k}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$$

mit:

$$\boldsymbol{k} = \left(E_k, \vec{k}\right); \quad \boldsymbol{x} = \left(x^0, \vec{x}\right)$$

und

$$k^2 = m^2$$
$$E_k = +\sqrt{k^2 + m^2}$$

Einsetzen dieses Ansatzes in (4.1) auf Seite 10 liefert:

$$\begin{aligned}
\Box \int \mathrm{d}^4 k\, h\left(\boldsymbol{k}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} &= \\
(\text{da } \Box \text{ auf } \boldsymbol{x} \text{ wirkt}) &= \int \mathrm{d}^4 k\, h\left(\boldsymbol{k}\right) \Box \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \\
&= \int \mathrm{d}^4 k\, h\left(\boldsymbol{k}\right) \partial_\mu \partial^\mu \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\mu \cdot x^\mu}
\end{aligned}$$

$$= \int d^4k\, h(\boldsymbol{k})\, (-ik^{\mu})\, (-ik_{\mu})\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$$

$$= \int d^4k\, h(\boldsymbol{k}) \left(-\boldsymbol{k}^2\right) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$$

Damit geht $(\Box + m^2)\,\phi(\boldsymbol{x}) = 0$ über in:

$$\int d^4k\, h(\boldsymbol{k}) \left(-\boldsymbol{k}^2 + m^2\right) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$$

Da dies nur möglich ist, wenn der Integrand verschwindet, muß also

$$\left(-\boldsymbol{k}^2 + m^2\right) h(\boldsymbol{k}) = 0 \tag{5.1}$$

gelten.

Betrachten wir diese Gleichung genauer, dann stellt man fest, daß $h(\boldsymbol{k})$ eine singuläre Funktion sein muß (oder die triviale Nullösung, die uns natürlich nicht interessiert), denn es gilt:

$$\boldsymbol{k}^2 \neq m^2 \quad \overset{(5.1)}{\Rightarrow} \quad h(\boldsymbol{k}) = 0$$

und für $\boldsymbol{k}^2 = m^2$ kann $h(\boldsymbol{k})$ einen beliebigen Wert annehmen.

Dieses Verhalten läßt uns statt nach funktionswertigen Lösungen nach distributionswertigen Lösungen suchen.

In der Tat gilt

$$\forall x \quad x \cdot \delta(x) = 0$$

so daß wir $h(\boldsymbol{k})$ schreiben als:

$$h(\boldsymbol{k}) = g(\boldsymbol{k})\, \delta\left(\boldsymbol{k}^2 - m^2\right) \tag{5.2}$$

denn dann ist:

$$\begin{aligned} \left(-\boldsymbol{k}^2 + m^2\right) h(\boldsymbol{k}) &= g(\boldsymbol{k}) \left(-\boldsymbol{k}^2 + m^2\right) \delta\left(\boldsymbol{k}^2 - m^2\right) \\ &= g(\boldsymbol{k}) \underbrace{\left(-\boldsymbol{k}^2 + m^2\right) \delta\left(-\boldsymbol{k}^2 + m^2\right)}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

also ist obiges $h(\boldsymbol{k})$ in Gleichung (5.2) eine Lösung von (5.1).

Aus (5.2) sieht man, daß der Träger von $h(\boldsymbol{k})$ (also die Menge aller 4-Vektoren, für die $h(\boldsymbol{k}) \neq 0$ ist) nur die sogenannte **Massenschale** $\boldsymbol{k}^2 = m^2$ ist.

Damit folgt für die Ortsraum-Lösung:

$$\boxed{\phi(\boldsymbol{x}) = \int d^4k\, \delta\left(\boldsymbol{k}^2 - m^2\right) g(\boldsymbol{k})\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}}$$

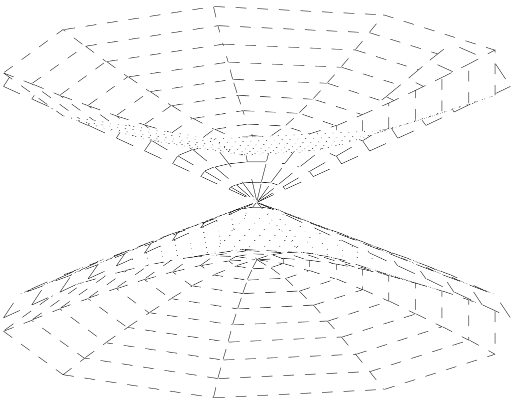

Abbildung 5.1: Massenschalen

Wir sehen, daß in dieser Formel zwei lorentzinvariante(?) Größen auftreten:

- das 4-dimensionale Volumenelement im Impulsraum $\mathrm{d}^4k$
- die 4-dimensionale $\delta$-Distribution.

Die Lorentzinvarianz dieser Größen ergibt sich wie folgt:

Sei $\boldsymbol{k}' := \Lambda\boldsymbol{k}$; $\quad \Lambda\in\mathcal{L}$ dann gilt $\boldsymbol{k}'^2 = \boldsymbol{k}^2$ da $\Lambda$ eine Isometrie bezüglich der Lorentzmetrik ist.

Ferner gilt:

$$\mathrm{d}^4k' = |\det\Lambda|\,\mathrm{d}^4k \ = \mathrm{d}^4k$$

da die Determinante einer Lorentztransformationden Wert -1 also $|\det\Lambda|$ den Wert +1 besitzt.

Wir wollen nun eine Norm für die Zustände $\phi\,(\boldsymbol{x})$ ansetzen und anschließend das Skalarprodukt daraus gewinnen.

In der nichtrelativistischen Quantenmechanik hatten wir gefunden, daß für

$$\Psi\,(\vec{x},t) = \int \mathrm{d}^3k\, g\left(\vec{k}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-E_k t\right)}$$

die Norm

$$\|\Psi\,(\vec{x},t)\|^2 = \int \mathrm{d}^3k\ |g\,(\boldsymbol{k})|^2$$

gilt.

Dadurch motiviert, setzen wir für die Norm relativistischer Spin-0-Funktionen an:

$$\boxed{\|\phi\|^2 := \int \mathrm{d}^4k\,\delta\left(\boldsymbol{k}^2 - m^2\right)|g\,(\boldsymbol{k})|^2} \tag{5.3}$$

Das Auftreten der $\delta$-Distribution wird dadurch begründet, daß die Integration nur über physikalisch sinnvolle 4-Impulse zu erstrecken ist und für massive Teilchen mit Masse $m$ $\boldsymbol{k}$ auf die durch Bedingung $\boldsymbol{k}^2 = m^2$ definierte Massenschale eingeschränkt ist. (Mathematisch ausgedrückt ist der Träger von $g$ die Massenschale).

Diese Definition wirft 2 Fragen auf:

1. Wir haben die Lorentzinvarianz von $\mathrm{d}^4k$ und $\delta\left(\boldsymbol{k}^2-m^2\right)$ gezeigt, ist damit $\|\phi\|^2$ poincaréinvariant?
2. Ist diese Definition der Norm konsistent mit dem üblichen Verfahren, die Norm aus der 0-ten Komponente des erhaltenen 4-Stromes zu konstruieren?

Die erste Frage beantworten wir, indem wir das Transformationsverhalten von $g(\boldsymbol{k})$ unter Poincaré-Transformationen ermitteln.

Es ist:

$$
\begin{aligned}
(\rho(A)\phi)(\boldsymbol{x}) &= \phi'(\boldsymbol{x}) = \phi\left(\overset{-1}{\Lambda}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\right) \\
&= \int \mathrm{d}^4k\,\delta\left(\boldsymbol{k}^2-m^2\right) g(\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\left(\overset{-1}{\Lambda}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\right)}
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

Wir werten nun die Phase der Exponentialfunktion aus:

$$
\boldsymbol{k}\cdot\left(\overset{-1}{\Lambda}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\right) = \Lambda\boldsymbol{k}\cdot\Lambda\left(\overset{-1}{\Lambda}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\right) \tag{5.5}
$$

denn da $\Lambda$ isometrisch bezüglich der Lorentzmetrik ist, gilt: $g(\Lambda\boldsymbol{x},\Lambda\boldsymbol{y})=g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ und dies in die Sprache des 4-Produktes $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}:=g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ übertragen lautet: $\Lambda\boldsymbol{x}\cdot\Lambda\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$. Setze nun $\boldsymbol{x}:=\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{y}:=\Lambda^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$

Aus (5.5) folgt nun, da $\Lambda\Lambda^{-1}=\mathbb{1}$ ist:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{k}\cdot\left(\overset{-1}{\Lambda}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\right) &= \Lambda\boldsymbol{k}\cdot\Lambda\left(\overset{-1}{\Lambda}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\right) \\
&= \Lambda\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})
\end{aligned}
$$

Dies in (5.4) eingesetzt, ergibt:

$$
\begin{aligned}
\phi'(\boldsymbol{x}) = \rho(A)\phi(\boldsymbol{x}) &= \int \mathrm{d}^4k\,\delta\left(\boldsymbol{k}^2-m^2\right) g(\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Lambda\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})} \\
&= \int \mathrm{d}^4k\,\delta\left(\boldsymbol{k}^2-m^2\right) g(\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Lambda\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{a}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Lambda\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{x}}
\end{aligned}
$$

Wir substituieren: $\boldsymbol{k}':=\Lambda\boldsymbol{k} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}^4k=\mathrm{d}^4k'$

Da dieser Variablenwechsel durch eine Lorentztransformation bewirkt wird, ist hierbei $\delta\left(\boldsymbol{k}'^2-m^2\right)=\delta\left(\boldsymbol{k}^2-m^2\right)$ und $\mathrm{d}^4k'=\mathrm{d}^4k$.

$$
\rho(A)\phi(\boldsymbol{x}) = \int \mathrm{d}^4k'\,\delta\left(\boldsymbol{k}'^2-m^2\right) g\left(\overset{-1}{\Lambda}\boldsymbol{k}'\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{a}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}}
$$

Umbenennung $\boldsymbol{k}'\to\boldsymbol{k}$ liefert:

$$
\rho(A)\phi(\boldsymbol{x}) = \int \mathrm{d}^4k\,\delta\left(\boldsymbol{k}^2-m^2\right) g\left(\overset{-1}{\Lambda}\boldsymbol{k}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{a}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{5.6}
$$

Erkläre nun eine Darstellung $\tilde{\rho}(A)$ im Impulsraum durch:

$$\rho(A)\,\phi(\boldsymbol{x}) = \int \mathrm{d}^4k\,\delta\left(\boldsymbol{k}^2 - m^2\right)\tilde{\rho}(A)\,g(\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{5.7}$$

Durch Vergleich von (5.6) auf der vorhergehenden Seite und (5.7) erhält man den Ausdruck für die Aktion der Poincaré-Gruppe im Impulsraum:

$$\boxed{g'(\boldsymbol{k}) := \tilde{\rho}(A)\,g(\boldsymbol{k}) = g\left(\overset{-1}{\Lambda}\,\boldsymbol{k}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{a}}} \tag{5.8}$$

und

$$\boxed{\rho(A)\,\phi(\boldsymbol{x}) = \int \mathrm{d}^4k\,\delta\left(\boldsymbol{k}^2 - m^2\right)g'(\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}} \tag{5.9}$$

Diese Formel beschreibt das Transformationsverhalten von $g(\boldsymbol{k})$ unter Poincaré-Transformation.

Nun können wir zeigen, daß (5.3) auf Seite 18 poincaréinvariant ist, denn:

$$\begin{aligned}
\|\rho(A)\,\phi(\boldsymbol{k})\|^2 &= \left\|\rho(A)\int \mathrm{d}^4k\,\delta\left(\boldsymbol{k}^2 - m^2\right)g(\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right\|^2 \\
&= \left\|\int \mathrm{d}^4k\,\delta\left(\boldsymbol{k}^2 - m^2\right)g'(\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right\|^2 \\
&= \int \mathrm{d}^4k\,\delta\left(\boldsymbol{k}^2 - m^2\right)\left|g'(\boldsymbol{k})\right|^2 \\
&= \int \mathrm{d}^4k\,\delta\left(\boldsymbol{k}^2 - m^2\right)\left|g\left(\overset{-1}{\Lambda}\,\boldsymbol{k}\right)\right|^2
\end{aligned}$$

Substituiere: $\boldsymbol{p} = \Lambda^{-1}\boldsymbol{k} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}^4k = \mathrm{d}^4p\,,\; \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{p}^2$

$$\Rightarrow\quad \|\rho(A)\,\phi(\boldsymbol{x})\|^2 = \int \mathrm{d}^4p\,\delta\left(\boldsymbol{p}^2 - m^2\right)|g(\boldsymbol{p})|^2 = \|\phi\|^2$$

Damit ist die Invarianz der Norm unter Poincarétransformation bewiesen und daraus folgt mit: $\|\rho(A)\,\phi\| = \|\phi\| \Rightarrow \langle\rho(A)\,\phi, \rho(A)\,\phi\rangle = \langle\phi,\phi\rangle$ die Unitarität der Darstellung $\rho$.

Wir wenden uns nun der Beantwortung der 2. Frage zu. Dazu geben wir zunächst die durch die 0-Komponente des 4-Stromes induzierte Norm an, die wir mit $\|\cdot\|_C^2$ (C: current-norm) bezeichnen:

$$\|\phi\|_C^2 = \int \mathrm{d}^3x\,j^0(\boldsymbol{x};\phi)$$

und mit

$$j^0(\boldsymbol{x};\phi) = \mathrm{i}\left(\phi^*(\boldsymbol{x})\,\partial^0\phi(\boldsymbol{x}) - \left(\partial^0\phi^*(\boldsymbol{x})\right)\phi(\boldsymbol{x})\right)$$

ist

$$\boxed{\|\phi\|_C^2 = \mathrm{i}\int\limits_{t=0} \left[\phi^*(\boldsymbol{x})\,\partial^0\phi(\boldsymbol{x}) - \left(\partial^0\phi^*(\boldsymbol{x})\right)\phi(\boldsymbol{x})\right]\mathrm{d}^3x} \tag{5.10}$$

Um diese Norm nun für unser gegebenes $\phi(\boldsymbol{x})$ explizit ausrechnen zu können, führen wir in dem Ausdruck für $\phi(\boldsymbol{x})$ die $k^0$-Integration aus:

Wir hatten:

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{x}) &= \int \mathrm{d}^4k\,\delta\left(\boldsymbol{k}^2 - m^2\right) g(\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \\ &= \int \mathrm{d}^3k\,\mathrm{d}k^0\delta\left(\boldsymbol{k}^2 - m^2\right) g(\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\end{aligned}$$

Nun ist: $\boldsymbol{k}^2 - m^2 = k^{0\,2} - \vec{k}^2 - m^2 = k^{0\,2} - E_k^2; \quad \text{mit } E_k^2 = \vec{k}^2 + m^2$

$$\Rightarrow \quad \phi(\boldsymbol{x}) = \int \mathrm{d}^3k\,\mathrm{d}k^0\delta\left(k^{0\,2} - E_k^2\right) g(\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{5.11}$$

Wir zerlegen nun die $\delta$-Distribution gemäß der Formel:

$$\delta(f(\boldsymbol{x})) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|} \quad \text{mit } f(x_i) = 0$$

Hier ist:

$$\begin{aligned} & f\left(k^0\right) = k^{0\,2} - E_k^2 \\ \Rightarrow \quad & f(k_i) \stackrel{!}{=} 0 \text{ führt zu } k_i^2 = E_k^2 \\ \Rightarrow \quad & k_1 = +E_k; \quad k_2 = -E_k \\ & f'\left(k^0\right) = 2k^0 \\ \Rightarrow \quad & f'(k_1) = 2E_k; \quad f'(k_2) = -2E_k \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\delta\left(k^{0\,2} - E_k^2\right) = \frac{1}{2E_k}\left[\delta\left(k^0 - E_k\right) + \delta\left(k^0 + E_k\right)\right]$$

Wir setzen dies in die Gleichung (5.11) für $\phi(\boldsymbol{x})$ ein:

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{x}) &= \int \mathrm{d}^3k\,\mathrm{d}k^0\frac{1}{2E_k}\left[\delta\left(k^0 - E_k\right) + \delta\left(k^0 + E_k\right)\right] g(\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \\ &= \int \mathrm{d}^3k\,\mathrm{d}k^0\frac{1}{2E_k}\left[\delta\left(k^0 - E_k\right) g\left(k^0, \vec{k}\right) + \delta\left(k^0 + E_k\right) g\left(k^0, \vec{k}\right)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\end{aligned}$$

Ausführen der $k^0$-Integration: (beachte: $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} = k^0 t - \vec{k}\cdot\vec{x}$ !)

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \int \mathrm{d}^3k\,\frac{1}{2E_k}\left[g\left(E_k, \vec{k}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(E_k t - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)} + g\left(-E_k, \vec{k}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(-E_k t - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)}\right]$$

$$\phi\left(\boldsymbol{x}\right)=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{2E_k}\left[g\left(E_k,\vec{k}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-E_kt\right)}+g\left(-E_k,\vec{k}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}\cdot\vec{x}+E_kt\right)}\right] \tag{5.12}$$

Man sieht hier deutlich, daß die allgemeine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung aus zwei Anteilen besteht, die man Lösungen mit positiver und negativer Frequenz nennt. Diese Bezeichnungsweise bedarf einer genaueren Erklärung:

In der nichtrelativistischen Quantenmechanik haben wir ein freies Teilchen durch ein Wellenpaket der Form

$$\Psi\left(\vec{x},t\right)=\int\mathrm{d}^3k\,g\left(\vec{k}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_kt\right)};\qquad\omega_k=\frac{k^2}{2m}$$

beschrieben.

Vergleicht man diesen Ausdruck für $\Psi$ mit (5.12) so findet man für den ersten Summanden:

$$\omega_k\hat{=}+E_k>0$$

und für den zweiten:

$$\omega_k\hat{=}-E_k<0$$

Aus diesem Grund bezeichnen wir den vom ersten Summanden herrührenden Anteil als positiven, den des zweiten Summanden als negativen Frequenzanteil.

Beachten wir, daß $E_k=+\sqrt{\vec{k}^2+m^2}$ gilt, so hängen $g\left(E_k,\vec{k}\right)$ und $g\left(-E_k,\vec{k}\right)$ nur noch vom 3-Vektor $\vec{k}$ ab.

Nun gehört $g\left(E_k,\vec{k}\right)$ zum positiven und $g\left(-E_k,\vec{k}\right)$ zum negativen Frequenzanteil, weshalb wir folgende Definition einführen:

$$\begin{aligned}g_+\left(\vec{k}\right)&:=g\left(E_k,\vec{k}\right)\\g_-\left(\vec{k}\right)&:=g\left(-E_k,\vec{k}\right)\end{aligned}$$

(5.12) schreibt sich somit:

$$\boxed{\phi\left(\boldsymbol{x}\right)=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{2E_k}\left[g_+\left(\vec{k}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-E_kt\right)}+g_-\left(\vec{k}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}\cdot\vec{x}+E_kt\right)}\right]} \tag{5.13}$$

Definieren wir noch Zustände:

$$\begin{aligned}\phi_+\left(\boldsymbol{x}\right)&:=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{2E_k}g_+\left(\vec{k}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-E_kt\right)}\\\phi_-\left(\boldsymbol{x}\right)&:=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{2E_k}g_-\left(\vec{k}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}\cdot\vec{x}+E_kt\right)}\end{aligned}$$

so läßt sich (5.13) kompakt schreiben:

$$\phi\left(\boldsymbol{x}\right)=\phi_+\left(\boldsymbol{x}\right)+\phi_-\left(\boldsymbol{x}\right) \tag{5.14}$$

Nach dieser Vorarbeit wenden wir uns nun der expliziten Berechnung von $\|\phi\|_C^2$ gemäß (5.10) auf Seite 21 zu.

Dazu benötigen wir vier Funktionen: $\phi(\boldsymbol{x})$, $\phi^*(\boldsymbol{x})$, $\partial^0\phi(\boldsymbol{x})$, $\partial^0\phi^*(\boldsymbol{x})$.

Es ist

$$
\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{x}) &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{2E_k}\left[g_+\left(\vec{k}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-E_kt\right)}+g_-\left(\vec{k}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}\cdot\vec{x}+E_kt\right)}\right]\\
\phi^*(\boldsymbol{x}) &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{2E_k}\left[g_+^*\left(\vec{k}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-E_kt\right)}+g_-^*\left(\vec{k}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\vec{k}\cdot\vec{x}+E_kt\right)}\right]\\
\partial^0\phi(\boldsymbol{x}) &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{2E_k}(-\mathrm{i}E_k)\left[g_+\left(\vec{k}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-E_kt\right)}-g_-\left(\vec{k}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}\cdot\vec{x}+E_kt\right)}\right]\\
\partial^0\phi^*(\boldsymbol{x}) &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{2E_k}(\mathrm{i}E_k)\left[g_+^*\left(\vec{k}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-E_kt\right)}-g_-^*\left(\vec{k}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\vec{k}\cdot\vec{x}+E_kt\right)}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\ \|\phi\|_C^2 &= \mathrm{i}\int_{t=0}\int \mathrm{d}^3x\int \mathrm{d}^3k\,\mathrm{d}^3k'\,\frac{1}{2E_k}\frac{1}{2E_{k'}}\times\\
&\qquad\times\Big\{\left[g_+^*\left(\vec{k}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-E_kt\right)}+g_-^*\left(\vec{k}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\vec{k}\cdot\vec{x}+E_kt\right)}\right]\cdot\\
&\qquad\quad\cdot(-\mathrm{i}E_{k'})\cdot\left[g_+\left(\vec{k}'\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}'\cdot\vec{x}-E_{k'}t\right)}-g_-\left(\vec{k}'\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}'\cdot\vec{x}+E_{k'}t\right)}\right]-\\
&\qquad\quad-(\mathrm{i}E_k)\cdot\left[g_+^*\left(\vec{k}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-E_kt\right)}-g_-^*\left(\vec{k}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\vec{k}\cdot\vec{x}+E_kt\right)}\right]\cdot\\
&\qquad\quad\cdot\left[g_+\left(\vec{k}'\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}'\cdot\vec{x}-E_{k'}t\right)}+g_-\left(\vec{k}'\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}'\cdot\vec{x}+E_{k'}t\right)}\right]\Big\}\\
(*) &= \mathrm{i}\int_{t=0}\int \mathrm{d}^3x\int \mathrm{d}^3k\,\mathrm{d}^3k'\,\frac{1}{2E_k\cdot 2E_{k'}}\times\\
&\qquad\times\Big\{g_+^*\left(\vec{k}\right)g_+\left(\vec{k}'\right)(-\mathrm{i}E_{k'})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}'-\vec{k}\right)\cdot\vec{x}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_k-E_{k'})t}-\\
&\qquad\quad-g_+^*\left(\vec{k}\right)g_-\left(\vec{k}'\right)(-\mathrm{i}E_{k'})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}'-\vec{k}\right)\cdot\vec{x}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_k+E_{k'})t}+\\
&\qquad\quad+g_-^*\left(\vec{k}\right)g_+\left(\vec{k}'\right)(-\mathrm{i}E_{k'})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}'-\vec{k}\right)\cdot\vec{x}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_k+E_{k'})t}-
\end{aligned}
$$

$$- g_{-}^{*}\left(\vec{k}\right) g_{-}\left(\vec{k}'\right)\left(-\mathrm{i}E_{k'}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}'-\vec{k}\right)\cdot\vec{x}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{k'}-E_{k})t} -$$

$$- g_{+}^{*}\left(\vec{k}\right) g_{+}\left(\vec{k}'\right)\left(\mathrm{i}E_{k'}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}'-\vec{k}\right)\cdot\vec{x}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{k}-E_{k'})t} -$$

$$- g_{+}^{*}\left(\vec{k}\right) g_{-}\left(\vec{k}'\right)\left(\mathrm{i}E_{k'}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}'-\vec{k}\right)\cdot\vec{x}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{k}+E_{k'})t} +$$

$$+ g_{-}^{*}\left(\vec{k}\right) g_{+}\left(\vec{k}'\right)\left(\mathrm{i}E_{k'}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}'-\vec{k}\right)\cdot\vec{x}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{k}+E_{k'})t} +$$

$$+ g_{-}^{*}\left(\vec{k}\right) g_{-}\left(\vec{k}'\right)\left(\mathrm{i}E_{k'}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}'-\vec{k}\right)\cdot\vec{x}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{k'}-E_{k})t} \Big\}$$

Ausführen der $x$-Integration und $t=0$ liefert: (dabei wird das vor dem Integral stehende i hineingezogen!)

$$
\begin{aligned}
\|\phi\|_C^2 \;=\; (2\pi)^3 \int \mathrm{d}^3k\, \mathrm{d}^3k' \,\frac{1}{2E_k \cdot 2E_{k'}} \quad \{ \quad & g_+^*\left(\vec{k}\right) g_+\left(\vec{k}'\right) E_{k'}\delta\left(\vec{k}'-\vec{k}\right) - \\
- \quad & g_+^*\left(\vec{k}\right) g_-\left(\vec{k}'\right) E_{k'}\delta\left(\vec{k}'-\vec{k}\right) + \\
+ \quad & g_-^*\left(\vec{k}\right) g_+\left(\vec{k}'\right) E_{k'}\delta\left(\vec{k}'-\vec{k}\right) - \\
- \quad & g_-^*\left(\vec{k}\right) g_-\left(\vec{k}'\right) E_{k'}\delta\left(\vec{k}'-\vec{k}\right) + \\
+ \quad & g_+^*\left(\vec{k}\right) g_+\left(\vec{k}'\right) E_{k}\delta\left(\vec{k}'-\vec{k}\right) + \\
+ \quad & g_+^*\left(\vec{k}\right) g_-\left(\vec{k}'\right) E_{k}\delta\left(\vec{k}'-\vec{k}\right) - \\
- \quad & g_-^*\left(\vec{k}\right) g_+\left(\vec{k}'\right) E_{k}\delta\left(\vec{k}'-\vec{k}\right) - \\
- \quad & g_-^*\left(\vec{k}\right) g_-\left(\vec{k}'\right) E_{k}\delta\left(\vec{k}'-\vec{k}\right) \}
\end{aligned}
$$

Ausführen der $k'$-Integration:

$$
\begin{aligned}
\|\phi\|_C^2 \;=\; (2\pi)^3 \int \frac{\mathrm{d}^3k}{4E_k^2} \quad \{ \quad & g_+^*\left(\vec{k}\right) g_+\left(\vec{k}\right) E_k - \\
- \quad & g_+^*\left(\vec{k}\right) g_-\left(\vec{k}\right) E_k + \\
+ \quad & g_-^*\left(\vec{k}\right) g_+\left(\vec{k}\right) E_k - \\
- \quad & g_-^*\left(\vec{k}\right) g_-\left(\vec{k}\right) E_k + \\
+ \quad & g_+^*\left(\vec{k}\right) g_+\left(\vec{k}\right) E_k + \\
+ \quad & g_+^*\left(\vec{k}\right) g_-\left(\vec{k}\right) E_k - \\
- \quad & g_-^*\left(\vec{k}\right) g_+\left(\vec{k}\right) E_k - \\
- \quad & g_-^*\left(\vec{k}\right) g_-\left(\vec{k}\right) E_k \}
\end{aligned}
$$

Faßt man zusammen, so erhält man:

$$
indexNorm!Induzierte|idxdef \boxed{\|\phi\|_C^2 = (2\pi)^3 \int \frac{\mathrm{d}^3k}{2E_k} \left( \left| g_+\left(\vec{k}\right)\right|^2 - \left| g_-\left(\vec{k}\right)\right|^2 \right)} \tag{5.15}
$$

Bevor wir unser Resultat (5.15) auf der vorhergehenden Seite diskutieren, sei noch eine Anmerkung zum obigen Rechengang angebracht: Wir haben diese Rechnung für $t=0$ durchgeführt, tatsächlich hätte man auch für $t\neq 0$ (5.15) auf der vorhergehenden Seite erhalten, denn wie man bei (*) sieht, fallen für die $g_+^* g_+$, bzw. $g_-^* g_-$ Anteile die Exponentialfunktionen bei der $k'$-Integration wegen $\exp\left(\mathrm{i}\left(E_k - E_{k'}\right) t\right) = \exp\left(0\right) = 1$ weg. Die einzigen Exponentialfunktionen verbleiben bei den „Mischtermen" $g_+^* g_-$, $g_-^* g_+$. Für beide Kombinationen ergibt sich der zusätzliche Faktor $\exp\left(2\mathrm{i}E_k t\right)$ nach der $k'$-Integration. Da diese Mischterme sich aber gegenseitig wegheben, fallen auch die Exponentialfunktionen aus dem Endresultat heraus und man erhält wieder (5.15) auf der vorhergehenden Seite, allerdings bei dieser Vorgehensweise bei beliebiger Zeit $t$.

Damit ist erneut gezeigt, daß $\int \mathrm{d}^3x\, j^0\left(\boldsymbol{x}\right)$ zeitunabhängig ist!

Wir wollen nun (5.15) auf der vorhergehenden Seite diskutieren. Als erstes wollen wir (5.15) mit unserer anfänglichen Norm (5.3) auf Seite 18 vergleichen.

Dazu führen wir in (5.3) auf Seite 18 zunächst die $k^0$-Integration aus:

$$
\begin{aligned}
\|\phi\|^2 &= \int \mathrm{d}^4k\, \delta\left(\boldsymbol{k}^2 - m^2\right) \left|g\left(\boldsymbol{k}\right)\right|^2 \\
&= \int \mathrm{d}^3k\, \mathrm{d}k^0 \frac{1}{2E_k} \left(\delta\left(k^0 - E_k\right) + \delta\left(k^0 + E_k\right)\right) \underbrace{\left|g\left(\boldsymbol{k}\right)\right|^2}_{\left|g\left(k^0, \vec{k}\right)\right|^2} \\
&= \int \mathrm{d}^3k\, \frac{1}{2E_k} \left(\left|g\left(E_k, \vec{k}\right)\right|^2 + \left|g\left(-E_k, \vec{k}\right)\right|^2\right)
\end{aligned}
$$

das heißt, wir haben:

$$
\boxed{\|\phi\|^2 = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{2E_k} \left(\left|g\left(E_k, \vec{k}\right)\right|^2 + \left|g\left(-E_k, \vec{k}\right)\right|^2\right)}
$$

Mit den Definitionen von $g_+\left(\vec{k}\right)$, $g_-\left(\vec{k}\right)$ erhält man:

$$
\boxed{\|\phi\|^2 = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{2E_k} \left(\left|g_+\left(\vec{k}\right)\right|^2 + \left|g_-\left(\vec{k}\right)\right|^2\right)} \tag{5.16}
$$

Vergleicht man (5.15) auf der vorhergehenden Seite und (5.16) so fällt der Hauptunterschied sofort auf: (5.15) ist indefinit (da es infolge des Minuszeichens Funktionen $\phi\left(\boldsymbol{x}\right)$ gibt, für die gilt, daß $\phi\left(\boldsymbol{x}\right) \neq 0$ aber $\|\phi\|_C^2 = 0$.) während (5.16) positiv definit ist! Dies bedeutet, daß es Normen für die Klein-Gordon-Gleichung gibt, die positiv definit sind (die Norm $\|\phi\|_C$ gehört natürlich nicht dazu), so daß die oft in der Literatur suggerierte Behauptung, Klein-Gordon-Zustände wären notwendig mit einer indefiniten Norm verknüpft, falsch ist!

Eine Übereinstimmung von (5.15) auf der vorhergehenden Seite und (5.16) ist gegeben, wenn $g_-\left(\vec{k}\right) = 0$, das heißt wenn $\phi\left(\boldsymbol{x}\right) = \phi_+\left(\boldsymbol{x}\right)$ ist.

Anders ausgedrückt: (5.15) und (5.16) stimmen für Zustände, die aus positiven Frequenzlösungen aufgebaut sind, überein.

Man kann nun (5.15) und (5.16) auch durch die Norm von $\phi_+(\boldsymbol{x})$ und $\phi_-(\boldsymbol{x})$ ausdrücken: Berechnet man $\|\phi_+\|_C^2$ so braucht man in der obenstehenden Rechnung, beziehungsweise im Resultat (5.15) nur $g_-\left(\vec{k}\right)=0$ zu setzen, analoges gilt für $\|\phi_-\|_C^2$. Man erhält:

$$\|\phi_+\|_C^2 = (2\pi)^3 \int \frac{\mathrm{d}^3k}{2E_k} \left|g_+\left(\vec{k}\right)\right|^2 \tag{5.17}$$

$$\|\phi_-\|_C^2 = -(2\pi)^3 \int \frac{\mathrm{d}^3k}{2E_k} \left|g_-\left(\vec{k}\right)\right|^2 \tag{5.18}$$

$$\Rightarrow \quad \|\phi\|_C^2 = \|\phi_+\|_C^2 + \|\phi_-\|_C^2 \tag{5.19}$$

Wir wollen, bevor wir die Zustände negativer Strom-(current-) Norm physikalisch und gruppentheoretisch interpretieren, das Strom-Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_C$ definieren:

<u>Def.:</u> $\phi_1(\boldsymbol{x}), \phi_2(\boldsymbol{x}): \quad \mathbb{M} \to \mathbb{C}$

$$\langle\phi_1,\phi_2\rangle_C := \mathrm{i} \int\limits_{t=0} \mathrm{d}^3x \, \left[\phi_1^*(\boldsymbol{x})\, \partial^0\phi_2(\boldsymbol{x}) - \left(\partial^0\phi_1^*(\boldsymbol{x})\right)\phi_2(\boldsymbol{x})\right] \tag{5.20}$$

Mit dieser Definition ist sofort klar, daß

$$\|\phi\|_C^2 = \langle\phi,\phi\rangle_C$$

ist.

Ferner ist klar ersichtlich, daß $\langle\cdot,\cdot\rangle_C$ antilinear im ersten und linear im zweiten Argument ist und daß gilt $\langle\phi_1,\phi_2\rangle_C = \langle\phi_2,\phi_1\rangle_C^*$.

Wir zeigen nun, daß die Zustände $\phi_+(\boldsymbol{x})$ und $\phi_-(\boldsymbol{x})$ im Sinne von $\langle\cdot,\cdot\rangle_C$ orthogonal sind. Anschließend wird die Invarianz der Normen $\|\phi_+\|$, $\|\phi_-\|$ unter Poincaré-Transformationen nachgewiesen. Das Kapitel wird mit der Interpretation von $\phi_+(\boldsymbol{x})$ und $\phi_-(\boldsymbol{x})$ abgeschlossen.

<u>Beh.:</u> $\langle\phi_+,\phi_-\rangle_C = 0$

<u>Bew.:</u>

$$\langle\phi_+,\phi_-\rangle_C := \mathrm{i} \int\limits_{t=0} \mathrm{d}^3x \, \left[\phi_+^*(\boldsymbol{x})\, \partial^0\phi_-(\boldsymbol{x}) - \left(\partial^0\phi_+^*(\boldsymbol{x})\right)\phi_-(\boldsymbol{x})\right]$$

Mit:

$$\phi_+(\boldsymbol{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{2E_k} g_+\left(\vec{k}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-E_kt\right)}$$

$$\phi_+^*(\boldsymbol{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{2E_k} g_+^*\left(\vec{k}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-E_kt\right)}$$

$$\partial^0\phi_+^*(\boldsymbol{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{2E_k} g_+^*\left(\vec{k}\right) (\mathrm{i}E_k)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-E_kt\right)}$$

$$
\begin{aligned}
\phi_-(\boldsymbol{x}) &= \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{2E_k} g_-\left(\vec{k}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}\cdot\vec{x}+E_k t\right)} \\
\partial^0 \phi_-(\boldsymbol{x}) &= \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{2E_k} g_-\left(\vec{k}\right) (\mathrm{i}E_k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}\cdot\vec{x}+E_k t\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle \phi_+, \phi_- \rangle_C &= \mathrm{i}\int_{t=0} \mathrm{d}^3 x \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{2E_k}\frac{\mathrm{d}^3 k'}{2E_{k'}} \left\{ g_+^*\left(\vec{k}\right) g_-\left(\vec{k}'\right) (\mathrm{i}E_{k'})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}'-\vec{k}\right)\cdot\vec{x}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{k'}+E_k)t} - \right. \\
&\qquad \left. - g_+^*\left(\vec{k}\right) g_-\left(\vec{k}'\right) (\mathrm{i}E_k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}'-\vec{k}\right)\cdot\vec{x}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{k'}+E_k)t} \right\} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{2E_k}\frac{\mathrm{d}^3 k'}{2E_{k'}} \left\{ g_+^*\left(\vec{k}\right) g_-\left(\vec{k}'\right) (-E_{k'})\, \delta\left(\vec{k}'-\vec{k}\right) + \right. \\
&\qquad \left. + g_+^*\left(\vec{k}\right) g_-\left(\vec{k}'\right) E_k \delta\left(\vec{k}'-\vec{k}\right) \right\} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{4E_k} \underbrace{\left\{ -g_+^*\left(\vec{k}\right) g_-\left(\vec{k}\right) + g_+^*\left(\vec{k}\right) g_-\left(\vec{k}\right) \right\}}_{=0} \\
&= 0 \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}
$$

Die Zustände $\phi_+(\boldsymbol{x})$ und $\phi_-(\boldsymbol{x})$ sind also in der Tat orthogonal!

Wir zeigen nun, daß die Norm beziehungsweise das Vorzeichen der Norm invariant unter orthochronen Poincaré-Transformation ist. Dazu überführen wir die Gleichungen (5.17) auf der vorhergehenden Seite und (5.18) auf der vorhergehenden Seite in Formeln, an denen die Invarianz besonders einfach zu sehen ist, wie es beispielsweise bei (5.3) auf Seite 18 der Fall ist.

Zu diesem Zweck führen wir eine $\Theta$-Funktion ein, die das Vorzeichen von $k^0$ indiziert:

$$
\Theta\left(k^0\right) := \begin{cases} 1 & k^0 > 0 \\ 0 & k^0 \leq 0 \end{cases}
$$

$$
\Rightarrow \qquad \Theta\left(-k^0\right) := \begin{cases} 0 & k^0 > 0 \\ 1 & k^0 \leq 0 \end{cases}
$$

Wir zeigen nun, daß gilt:

$$
\|\phi_+\|_C^2 = \int \mathrm{d}^4 k\, \delta\left(\boldsymbol{k}^2 - m^2\right) \Theta\left(k^0\right) |g(\boldsymbol{k})|^2 \tag{5.21}
$$

$$
\|\phi_-\|_C^2 = -\int \mathrm{d}^4 k\, \delta\left(\boldsymbol{k}^2 - m^2\right) \Theta\left(-k^0\right) |g(\boldsymbol{k})|^2 \tag{5.22}
$$

$$
\Rightarrow \qquad \|\phi\|_C^2 = \int \mathrm{d}^4 k\, \delta\left(\boldsymbol{k}^2 - m^2\right) \epsilon\left(k^0\right) |g(\boldsymbol{k})|^2
$$

$$
\text{mit} \qquad \epsilon\left(k^0\right) := \Theta\left(k^0\right) - \Theta\left(-k^0\right)
$$

Dabei ist $g(\boldsymbol{k})$ wie schon zu Beginn dieses Kapitels eine beliebige 4-Impulsverteilungsfunktion.

Es ist nun:

$$\int \mathrm{d}^4k\,\delta\left(\boldsymbol{k}^2-m^2\right)\Theta\left(k^0\right)|g(\boldsymbol{k})|^2=\int \mathrm{d}^3k\,\mathrm{d}k^0\frac{1}{2E_k}\left[\delta\left(k^0-E_k\right)+\delta\left(k^0+E_k\right)\right]\Theta\left(k^0\right)|g(\boldsymbol{k})|^2$$

$$= \int \mathrm{d}^3k\,\mathrm{d}k^0\frac{1}{2E_k}\delta\left(k^0-E_k\right)|g(\boldsymbol{k})|^2$$

diese letzte Umformung folgt daraus, daß $\Theta(k^0)$ nur für $k^0>0$ von 0 verschieden ist. Aus diesem Grund ist der Beitrag des $k^0$-Integrals von $-\infty$ bis 0 Null und der Anteil $\delta(k^0+E_k)$ fällt weg, so daß nur das obenstehende Integral verbleibt.

Nach Ausführen der $k^0$-Integration erhalten wir also:

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}^4k\,\delta\left(\boldsymbol{k}^2-m^2\right)\Theta\left(k^0\right)|g(\boldsymbol{k})|^2 &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{2E_k}\left|g\left(E_k,\vec{k}\right)\right|^2 \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{2E_k}\left|g_+\left(\vec{k}\right)\right|^2 \\
\text{(also nach (5.17) auf Seite 27)} \qquad &= \|\phi_+\|_C^2
\end{aligned}$$

Völlig analog beweist man (5.22) auf der vorherigen Seite. Man muß nur den Beitrag von $k^0>0$ wegen $\Theta(-k^0)$ weglassen und die $\delta(k^0+E_k)$-Distribution bei der $k^0$-Integration auswerten. Man erhält:

$$\begin{aligned}
-\int \mathrm{d}^4k\,\delta\left(\boldsymbol{k}^2-m^2\right)\Theta\left(-k^0\right)|g(\boldsymbol{k})|^2 &= -\int \frac{\mathrm{d}^3k}{2E_k}\left|g\left(-E_k,\vec{k}\right)\right|^2 \\
&= -\int \frac{\mathrm{d}^3k}{2E_k}\left|g_-\left(\vec{k}\right)\right|^2 \\
&= \|\phi_-\|_C^2
\end{aligned}$$

Damit wären (5.21) auf der gegenüberliegenden Seite und (5.22) auf der vorherigen Seite bewiesen. Wenn wir nun zeigen, daß $\Theta(k^0)$ und $\Theta(-k^0)$ bei Lorentztransformationen (ohne Zeitumkehr!) invariant bleiben, ist die Invarianz der Norm der Zustände $\phi_+, \phi_-$ bewiesen, denn aus der Invarianz von $\mathrm{d}^4k$, $\delta\left(\boldsymbol{k}^2-m^2\right)$, $\Theta(\pm k^0)$ und mit dem Transformationsverhalten von $g(\boldsymbol{k})$ läßt sich, wie auf Seite 20 die Norminvarianz beweisen.

Bevor wir aber diesen Beweis ausführen, möchten wir noch einmal explizit darauf hinweisen, daß $\Theta(k^0)$ (und damit auch $\|\cdot\|_C$) natürlich nicht invariant unter der Zeitumkehroperation ist. Denn $\Theta$ hängt ja nur vom Vorzeichen von $k^0$ ab, das ja durch die Zeitumkehr per Definition geändert wird. Da die Zeitumkehr gerade dem Übergang zwischen den Massenschalen entspricht, ist (5.16) auf Seite 26 allerdings Zeitumkehrinvariant, und man erkennt deutlich, daß die unterschiedliche Definitheit eine Folge dieses Unterschieds im Transformationsverhalten ist.

Beh.: $\Theta(k^0)$ und $\Theta(-k^0)$ sind Lorentzinvariante.

(Physikalisch bedeutet dies die Lorentzinvarianz der positiven und negativen Massenschale.)

Bew.: Sei $k^0 > 0$ dann gilt:

$$\boldsymbol{k}^2 = m^2 \quad \Leftrightarrow \quad {k^0}^2 - \vec{k}^2 = m^2 \tag{5.23}$$
$$\Leftrightarrow \quad k^0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$

Betrachte einen Boost in 1-Richtung mit der Rapidität $u$; dann ist:

$$k'^0 = \Lambda^0{}_0 k^0 + \Lambda^0{}_1 k^1 = \cosh u \cdot k^0 + \sinh u \cdot k^1; \qquad k^0 > 0$$

Wir zeigen, daß mit $k^0 > 0$ auch $k'^0 > 0$ ist.

Aus (5.23) folgt:

$$\begin{aligned}
& {k^0}^2 - {k^1}^2 - \sum_{i=2}^{3} \left(k^i\right)^2 = m^2 \\
\Rightarrow \quad & \left(k^1\right)^2 = {k^0}^2 - \sum_{i=2}^{3} \left(k^i\right)^2 - m^2 \\
\Rightarrow \quad & \left|k^1\right| < \left|k^0\right| \\
\Rightarrow \quad & -\left|k^0\right| < k^1 < \left|k^0\right| \\
\Rightarrow \quad & k'^0 > \cosh u \cdot k^0 - \left|k^0\right| \cdot \sinh u = k^0 \cosh u - k^0 \sinh u \\
& \qquad \left(\text{da } k^0 > 0 \text{ ist } \left|k^0\right| = k^0\right)
\end{aligned}$$

Also ist:

$$\begin{aligned}
k'^0 &> k^0 \left(\cosh u - \sinh u\right) \\
&= k^0 \cdot \frac{1}{2} \left[\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u} - \mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}\right] \\
&= \frac{k^0}{2} \left[2\mathrm{e}^{-u}\right] = k^0 \mathrm{e}^{-u} > 0 \qquad \forall u
\end{aligned}$$

und damit ist $k'^0 > 0$ bewiesen.

Ähnlich argumentiert man, daß mit $k^0 < 0$ auch $k'^0 < 0$ ist:

Denn $k^1 < |k^0|$ und $k^0 = < -|k^0|$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad k'^0 &< \left|k^0\right| \left(-\cosh u + \sinh u\right) \\
&= \frac{|k^0|}{2} \left[-\mathrm{e}^u - \mathrm{e}^{-u} + \mathrm{e}^u - \mathrm{e}^{-u}\right] \\
&= -\left|k^0\right| \mathrm{e}^{-u} < 0 \qquad \forall u
\end{aligned}$$

Mit der Invarianz des Vorzeichens von $k^0$ ist die Invarianz der $\Theta$-Funktion und damit die Invarianz der Norm gezeigt.

Wir definieren nun Hilberträume $\mathcal{H}_+$, $\mathcal{H}_-$ und $\mathcal{H}$ bezüglich des Strom-Skalarproduktes:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_+ &:= \left\{\phi_+ : \mathbb{M} \to \mathbb{C} | \left(\Box + m^2\right)\phi_+ = 0;\ \|\phi_+\|_C^2 > 0;\ g_- = 0\right\} \\
\mathcal{H}_- &:= \left\{\phi_- : \mathbb{M} \to \mathbb{C} | \left(\Box + m^2\right)\phi_- = 0;\ \|\phi_-\|_C^2 < 0;\ g_+ = 0\right\} \\
\mathcal{H} &:= \left\{\phi : \mathbb{M} \to \mathbb{C} | \left(\Box + m^2\right)\phi = 0\right\}
\end{aligned}$$

Wir haben dann

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$$

Wir haben gezeigt, daß $\langle \phi_+, \phi_- \rangle = 0$ gilt, daraus folgt:

$$\mathcal{H}_+ \perp \mathcal{H}_-$$

$\mathcal{H}_-$ ist also das orthogonale Komplement von $\mathcal{H}_+$. Wir haben ferner gezeigt, daß $\mathcal{H}_-$, $\mathcal{H}_+$ invariante Unterräume sind, das heißt es gilt auch:

$$\begin{aligned}
\rho(A)\,\mathcal{H}_+ &\subset \mathcal{H}_+ \\
\rho(A)\,\mathcal{H}_- &\subset \mathcal{H}_-
\end{aligned}$$

Der Beweis, daß $\mathcal{H}_-$ ein invarianter Unterraum ist, hätte eigentlich nicht mehr explizit geführt werden müssen, denn es gilt, daß das orthogonale Komplement eines invarianten Unterraumes wieder ein invarianter Unterraum ist; und da $\mathcal{H}_-$ das orthogonale Komplement des invarianten Unterraumes $\mathcal{H}_+$ ist, ist auch die Invarianz von $\mathcal{H}_-$ klar.

Abschließend interpretieren wir die in diesem Kapitel gewonnenen Resultate.

Wir haben gefunden, daß sich der Hilbertraum $\mathcal{H}$ der Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung (mit dem Strom-Skalarprodukt) in zwei zueinander orthogonale poincaréinvariante Unterräume $\mathcal{H}_+$ und $\mathcal{H}_-$ zerlegen läßt. Die Darstellung der Poincaré-Gruppe auf $\mathcal{H}$ zerfällt in die Darstellungen auf $\mathcal{H}_+$ und $\mathcal{H}_-$, dabei ist die Strom-Norm $\|\cdot\|_C$ in $\mathcal{H}_+$ positiv und in $\mathcal{H}_-$ negativ definit.

Durch die Hilberträume $\mathcal{H}_+$ und $\mathcal{H}_-$ haben wir also zwei äquivalente irreduzible Darstellungen der Poincaré-Gruppe gefunden. Diese Darstellungen sind charakterisiert durch den Spin 0 und die Masse $m$.

Nun wollen wir noch die Zustände $\phi_+$ und $\phi_-$ interpretieren, indem wir nochmals $\phi_+$ und $\phi_-$ mit der Form eines Wellenpaketes für ein freies Teilchen mit Masse $m$ vergleichen. Ein solches Wellenpaket hat die Gestalt:

$$\begin{aligned}
\Psi(\boldsymbol{x}) &= \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{2E_k} g\left(\vec{k}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega_k t\right)} \qquad (5.24) \\
\text{mit} \quad \omega_k &= +\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}
\end{aligned}$$

Man sieht, daß $\phi_+(\boldsymbol{x})$ genau die oben angegebene Gestalt besitzt, aus diesem Grund interpretieren wir $\phi_+(\boldsymbol{x})$ als Wellenpaket eines Teilchens mit Masse $m$ und Spin 0.

$\phi_-(\boldsymbol{x})$ hingegen hat die Form (5.24) auf der vorhergehenden Seite wenn gilt:

$$\omega_k = -E_k = -\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$

Im Gegensatz zu $\phi_+(\boldsymbol{x})$ deren Frequenzen auf der positiven Massenschale liegen, liegen die Frequenzen von $\phi_-(\boldsymbol{x})$ auf der negativen Massenschale. Daher interpretieren wir die Lösungen mit negativer Frequenz als Antiteilchen mit Masse $m$ und Spin 0.

Beispiele für Teilchen und Antiteilchen, die durch die Klein-Gordon-Gleichung beschrieben werden, sind die pseudoskalaren und die skalaren Mesonen, so zum Beispiel

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Teilchen | $\pi^+$ | $\pi^0$ | $\eta$ | $\epsilon(1300)$ | $a_0(1300)$ |
| Antiteilchen | $\pi^-$ | $\pi^0$ | | | |

Damit ist die Darstellungstheorie der Poincaré-Gruppe für Spin 0 abgeschlossen und wir wenden uns dem Spin 1/2 zu.

# Kapitel 6

# Die Überlagerungsgruppe der Poincaré-Gruppe

Wir haben im letzten Kapitel die Darstellung der Poincaré-Gruppe für Teilchen mit Spin 0 behandelt. Dieser Diskussion soll nun in Analogie zur Drehgruppe die Behandlung von Teilchen mit Spin 1/2 folgen.

Bei der Drehgruppe sahen wir, daß sich für Teilchen mit Spin 1/2 keine Darstellungen, aber Strahldarstellungen konstruieren ließen. Die Ursache dafür war, daß Drehungen von Spin-1/2-Funktionen um $2\pi$ <u>nicht</u> die gleiche Wirkung haben wie die Identitätsoperation [8].

Da nun die Drehungen in der Poincaré-Gruppe enthalten sind (Drehungen sind gegenüber der Lorentzmetrik $g(\cdot,\cdot)$ isometrisch), müssen wir auch hier die <u>Strahl</u>darstellungen von $\mathcal{P}$ konstruieren.

Dazu gehen wir wie schon bei der Drehgruppe von Darstellungen der <u>Überlagerungsgruppe</u> $\tilde{\mathcal{P}}$ von $\mathcal{P}$ aus. Aus der Darstellung der Überlagerungsgruppe $\tilde{\mathcal{P}}$ gewinnen wir dann anschließend die <u>Strahldarstellung</u> der Poincaré-Gruppe $\mathcal{P}$.

Diese Vorgehensweise wird durch den Satz von Wigner und Bargmann motiviert, der besagt, daß jede Strahldarstellung der Poincaré-Gruppe $\mathcal{P}$ durch eine Darstellung der zugehörigen Überlagerungsgruppe $\tilde{\mathcal{P}}$ erzeugt wird.

Um die Überlagerungsgruppe von $\mathcal{P}$ zu finden, betrachten wir die Gruppenstruktur der Poincaré-Gruppe:

Jedes Element $A\in\mathcal{P}$ läßt sich durch eine Matrix $\Lambda$ und einen 4-Vektor $\boldsymbol{a}$ charakterisieren (siehe Kapitel 3):

$$A = (\Lambda, \boldsymbol{a})\,; \quad A\boldsymbol{x} := \Lambda\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$$

Für $A = (\Lambda, \boldsymbol{a})$ und $A' = (\Lambda', \boldsymbol{a}')$ gilt das Multiplikationsgesetz:

$$A \cdot A' = (\Lambda, \boldsymbol{a}) \cdot (\Lambda', \boldsymbol{a}') = (\Lambda\Lambda', \boldsymbol{a} + \Lambda\boldsymbol{a}')$$

denn faßt man in kanonischer Weise $AA'$ als aufeinander folgende Anwendung der Poincaré-Transformation $A$ und $A'$ auf $\boldsymbol{x}$ auf, so hat man:

$$\begin{aligned} AA'\boldsymbol{x} &= A\left(\Lambda'\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}'\right) = \\ = \Lambda\left(\Lambda'\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}'\right)+\boldsymbol{a} &= \Lambda\Lambda'\boldsymbol{x}+\Lambda\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a} \\ &= \left(\Lambda\Lambda',\Lambda\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a}\right)(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

Infolge des Anteiles $\Lambda\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a}$ (statt $\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a}$) bezeichnet man die Paarung $(\Lambda,\boldsymbol{a})$ als semidirektes Produkt und schreibt:

$$\mathcal{P} = \mathcal{L} \circledS \mathbb{M}$$

Dabei ist $\mathcal{L}$ die Lorentzgruppe (also die Menge aller Transformationen, die die Lorentzmetrik $g(\cdot,\cdot)$ invariant lassen) und $\mathbb{M}$ ist die Menge aller 4-Vektoren $\boldsymbol{a}$ mit der Lorentzmetrik (der Minkowski-Raum).

Wir können nun die Überlagerungsgruppe von $\mathcal{P}$ angeben, wenn wir die Überlagerungsgruppe $\widetilde{\mathcal{L}}$ von $\mathcal{L}$ konstruiert haben. Es ist dann nämlich:

$$\tilde{\mathcal{P}} = \widetilde{\mathcal{L}} \circledS_h \mathbb{M}$$

Um $\tilde{\mathcal{P}}$ angeben zu können, muß $\widetilde{\mathcal{L}}$ bekannt sein. Wir wollen hier $\widetilde{\mathcal{L}}$ nicht in allen Einzelheiten ableiten, sondern nur angeben.

Zur Motivation erinnern wir uns an die Situation bei der Drehguppe bei Spin 1/2: Dort hatten wir zunächst versucht, Darstellungen von SO(3) zu konstruieren. Der Ausgangspunkt waren die Definition der Exponentialdarstellung und der Zusammenhang mit der Lie-Algebra (s. [8] S. 12).

$$\rho_S(R) =: \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{\omega}\cdot\vec{N}}; \quad N_i \in \operatorname{Aut}\mathbb{C}^{2S+1}$$

mit

$$R = \mathrm{e}^{I(\vec{\omega})}$$

und

$$\left[\rho_S'(\Theta_1),\rho_S'(\Theta_2)\right] = \rho_S'\left([\Theta_1,\Theta_2]\right); \quad \Theta_i = I\left(\vec{\omega}_i\right)$$

Die $\vec{N}$ erfüllten dann die Vertauschungsrelationen der Lie-Algebra von SO(3) (s. [8] S. 13). Wir hatten aber gesehen, daß ein in dieser Weise definiertes $\rho_S$ für $S=1/2$ keine Darstellung ist, da $\mathbb{1}$ auf $+\mathbb{1}$ und $-\mathbb{1}$ abgebildet wird (s. [8], S. 20).

Wir sind dann von den Elementen $\alpha=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\vec{\sigma}}{2}\phi}\in\mathrm{SU}(2)$ ausgegangen und haben eine Überlagerungsabbildung $h:\mathrm{SU}(2)\to\mathrm{SO}(3)$ konstruiert. Anschließend haben wir eine Darstellung der SU(2) erklärt, und über $h(\alpha)$ die Strahldarstellung von SO(3) gewonnen (s. [8], S. 22ff.).

In dem hier behandelten Fall der Lorentzgruppe $\mathcal{L}$ könnte man analog vorgehen: Zunächst konstruiert man eine Darstellung der Lie-Algebra von $\mathcal{L}$, anschließend erhält man die Exponentialform der „Darstellung" von $\mathcal{L}$, die jedoch i.A. nicht die Darstellungseigenschaften hat. Man wird dann diese Exponentialabbildung als Elemente der Überlagerungsabbildung von $\mathcal{L}$ auffassen, und wie im Fall der Drehgruppe geschehen, eine Strahldarstellung aufbauen.

Wir wollen hier aber, wie gesagt, $\widetilde{\mathcal{L}}$ nicht konstruieren sondern nur angeben. Es ist:

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \mathrm{SL}\,(2,\mathbb{C})$$

Dabei ist:

$$\mathrm{SL}\,(2,\mathbb{C}) := \left\{\alpha|\alpha \in \mathrm{End}\,\mathbb{C}^2;\ \det\alpha = 1\right\}$$

Damit ist die Überlagerungsgruppe $\tilde{\mathcal{P}}$ von $\mathcal{P}$:

$$\tilde{\mathcal{P}} = \mathrm{SL}\,(2,\mathbb{C})\, ⓢ_h \mathbb{M}$$

mit der Gruppenstruktur des semidirekten Produktes:

$$\alpha, \alpha' \in \mathrm{SL}\,(2,\mathbb{C})\,; \qquad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}' \in \mathbb{M}:$$

$$(\alpha, \boldsymbol{a}) \cdot (\alpha', \boldsymbol{a}') \ :=\ (\alpha\alpha', h\,(\alpha)\,\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a})$$

Dabei ist $h\,(\alpha) \in \mathcal{L}$ und $h$ selbst ist die — noch zu definierende — Überlagerungsabbildung von $\mathrm{SL}\,(2,\mathbb{C})$ auf $\mathcal{L}$.

<u>Def.:</u>

$$\begin{aligned} h : \mathrm{SL}\,(2,\mathbb{C}) &\to \mathcal{L} \\ \alpha &\mapsto \Lambda \end{aligned}$$

mit

$$\alpha\sigma_\mu\alpha^+ =: h^\nu{}_\mu\,(\alpha)\,\sigma_\nu$$

und

$$\Lambda^\nu{}_\mu := h^\nu{}_\mu\,(\alpha)$$

Dabei ist: $\sigma_\mu := (\mathbb{1}, \sigma_i)$, wobei $\sigma_i$ die „normalen Paulimatrizen“sind.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Beachte das dann $\Lambda^\mu{}_\nu \in \mathbb{R}$ ist, da gilt $(\sigma_\mu)^+ = \sigma_\mu$.

Ferner definieren wir die später benötigten:

$$\sigma^\mu := g^{\mu\nu}\sigma_\nu \qquad \Rightarrow \sigma^\mu = (\mathbb{1}, -\sigma_i)$$

Man hat nun wiederum (wie schon bei der Behandlung der Drehgruppe) folgendes zu zeigen:

i) $h\,(\alpha_1)\,h\,(\alpha_2) = h\,(\alpha_1\alpha_2)$

ii) $h\,(\alpha) \in \mathcal{L}$, d.h. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{M}$ : $g\,(h\,(\alpha)\,\boldsymbol{x}, h\,(\alpha)\,\boldsymbol{x}) = g\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$,

bzw. $(h\,(\alpha)\,\boldsymbol{x})_\mu\,(h\,(\alpha)\,\boldsymbol{x})^\mu = x^\mu x_\mu$

iii) $\ker h\,(\alpha) = \{+\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$

iv) $\mathrm{Bild}\,h\,(\alpha) = \mathcal{L}$

Beweis: zu i) $\alpha_1\alpha_2\sigma_\mu\left(\alpha_1\alpha_2\right)^+ = \left(h\left(\alpha_1\alpha_2\right)\right)^\nu{}_\mu\sigma_\nu$

Andererseits:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1\alpha_2\sigma_\mu\left(\alpha_1\alpha_2\right)^+ &= \alpha_1\alpha_2\sigma_\mu\alpha_2^+\alpha_1^+ \\
&= \alpha_1\left(h\left(\alpha_2\right)\right)^\kappa{}_\mu\sigma_\kappa\alpha_1^+ \\
&= \left(h\left(\alpha_2\right)\right)^\kappa{}_\mu\alpha_1\sigma_\kappa\alpha_1^+ \\
&= \left(h\left(\alpha_2\right)\right)^\kappa{}_\mu\left(h\left(\alpha_1\right)\right)^\nu{}_\kappa\sigma_\nu \\
&= \underbrace{\left(h\left(\alpha_1\right)\right)^\nu{}_\kappa\left(h\left(\alpha_2\right)\right)^\kappa{}_\mu}_{\left(h\left(\alpha_1\right)h\left(\alpha_2\right)\right)^\nu{}_\mu}\sigma_\nu \\
\Rightarrow \quad \left(h\left(\alpha_1\right)h\left(\alpha_2\right)\right)^\nu{}_\mu &= \left(h\left(\alpha_1\alpha_2\right)\right)^\nu{}_\mu \\
\leadsto h\left(\alpha_1\right)h\left(\alpha_2\right) &= h\left(\alpha_1\alpha_2\right) \qquad \text{q.e.d}
\end{aligned}
$$

zu ii) Wir zeigen wieder zunächst, daß sich $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ als Determinante einer geeigneten Matrix schreiben läßt:

$$
\begin{aligned}
\det\left(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) &= \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} \\
\text{bzw. } \det\left(a^\mu\sigma_\mu\right) &= a^\mu a_\mu
\end{aligned}
$$

denn:

$$
\begin{aligned}
a^\mu\sigma_\mu &= \begin{pmatrix} a^0 & 0 \\ 0 & a^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a^1-\mathrm{i}a^2 \\ a^1+\mathrm{i}a^2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & -a^3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^0+a^3 & a^1-\mathrm{i}a^2 \\ a^1+\mathrm{i}a^2 & a^0-a^3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\leadsto \det\left(a^\mu\sigma_\mu\right) &= \left(a^0\right)^2 - \left(a^3\right)^2 - \left|a^1+\mathrm{i}\cdot a^2\right|^2 \\
&= \left(a^0\right)^2 - \left(a^3\right)^2 - \left(a^1\right)^2 - \left(a^2\right)^2 \\
&= a^\mu a_\mu = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}
\end{aligned}
$$

Dann ist:

$$
\begin{aligned}
\alpha\in\mathrm{SL}\left(2,\mathbb{C}\right): \quad \boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{a}' &= \det\left(\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{\sigma}\right); \qquad \text{mit } a'^\mu = h^\mu{}_\nu\left(\alpha\right)a^\nu \\
&= \det\left(a'^\mu\sigma_\mu\right) \\
&= \det\left(h^\mu{}_\nu\left(\alpha\right)a^\nu\sigma_\mu\right) \\
&= \det\left(h^\mu{}_\nu\left(\alpha\right)\sigma_\mu a^\nu\right) \\
&= \det\left(\alpha\sigma_\nu\alpha^+a^\nu\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \det(\sigma_\nu a^\nu) \underbrace{\det\alpha}_{=1} \underbrace{\det\alpha^+}_{=1} \\
&= \det(\sigma_\nu a^\nu) \\
&= \left(a^0\right)^2 - \left(a^1\right)^2 - \left(a^2\right)^2 - \left(a^3\right)^2 \\
&= a^\mu a_\mu = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}
\end{aligned}
$$

zu iii)

$$
\begin{aligned}
\alpha \in \ker h \;\Rightarrow\; h^\mu{}_\nu(\alpha) &= \delta^\mu{}_\nu \qquad (\text{Matrix: } h(\alpha) = \mathbb{1}) \\
\Rightarrow\; \alpha\sigma_\mu\alpha^+ &= \sigma_\mu
\end{aligned}
$$

Setze nun: $\mu=0$; dann ist: $\sigma_0=\mathbb{1}$ und $\alpha\alpha^+=\mathbb{1}$

$$\Rightarrow \quad \alpha \in \mathrm{SU}(2)$$

Für $\mu=i$ $(i=1,2,3)$ ist dann:

$$\alpha\sigma_i\alpha^+ = \sigma_i$$

und da $\alpha\in\mathrm{SU}(2)$ kann man mit dem gleichen Argument (Schursches Lemma) wie in [8] (S. 26) gezeigt werden, daß

$$\ker(h) = \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}\,.$$

zu iv) Wir haben folgenden Sachverhalt zu zeigen:

$$\forall\Lambda \in \mathcal{L} \;\; \exists\alpha \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\,, \text{ so daß} \alpha\sigma_\mu\alpha^+ = \Lambda^\nu{}_\mu\sigma_\nu \text{ gilt.}$$

Da wir die Parität und die Zeitumkehr ausschließen, muß diese Aussage nur für Rotationen und Boosts bewiesen werden. Für den Fall, daß $\Lambda(=R)$ eine Drehung im $\mathbb{R}^3$ ist, ist die Existenz eines entsprechenden $\alpha\in\mathrm{SU}(2)$ bereits in [8] (S. 23 ff.) bewiesen. Da ferner $\mathrm{SU}(2)\subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ ist, folgt damit auch die Existenz eines Elementes aus $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ für Rotationen.

Wir zeigen nun, daß auch für die Boosts ein zugehöriges $\alpha\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ existiert. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf Boosts in 1-Richtung.

Beh.: Sei $\Lambda\in\mathcal{L}$ Boost in 1-Richtung, mit der folgenden Darstellung:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u & 0 & 0 \\ \sinh u & \cosh u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann wird:

$$\alpha\sigma_\mu\alpha^+ = \Lambda^\nu{}_\mu\sigma_\nu \tag{6.1}$$

von $\alpha=\mathrm{e}^{\frac{u}{2}\sigma_1}$ gelöst. ($\sigma_1$: 1. Pauli-Matrix)

Beweis: Zunächst zeigen wir, daß gilt

$$e^{u\sigma_1/2} = \cosh\left(\frac{u}{2}\right) + \sigma_1 \cdot \sinh\left(\frac{u}{2}\right) \tag{6.2}$$

denn wir wissen aus [8] (S. 20), daß

$$e^{-i\omega_1\sigma_1/2} = \cos\frac{\omega_1}{2} - i\sigma_1 \cdot \sin\frac{\omega_1}{2}$$

Setze nun in dieser Formel: $-i\omega_1/2 := \frac{u}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = iu$

$$\Rightarrow \quad e^{u\sigma_1/2} = \cos\left(i\frac{u}{2}\right) - i\sigma_1 \cdot \sin\left(i\frac{u}{2}\right)$$

Mit $\cosh\left(\frac{u}{2}\right) = \cos\left(i\frac{u}{2}\right)$, $\sinh\left(\frac{u}{2}\right) = -i \cdot \sin\left(i\frac{u}{2}\right)$ (aus Formelsammlung oder durch direktes Nachrechnen über die Darstellung von cosh / sinh bzw. sin / cos durch Exponentialfunktionen.) folgt dann sofort

$$e^{u\sigma_1/2} = \cosh\left(\frac{u}{2}\right) + \sigma_1 \cdot \sinh\left(\frac{u}{2}\right)$$

Wir beweisen nun die eigentliche Aussage (6.1) auf der vorhergehenden Seite.
Für die (durch $\Lambda$ vorgegebene) rechte Seite von (6.1) haben wir:

$$\begin{array}{lcccc}
\mu=0: \ \Lambda^{\nu}{}_{\mu}\sigma_\nu & = & \Lambda^0{}_0\sigma_0 + \Lambda^1{}_0\sigma_1 & = & \mathbb{1}\cosh u + \sigma_1 \sinh u \\
\mu=1: \ \Lambda^{\nu}{}_{\mu}\sigma_\nu & = & \Lambda^0{}_1\sigma_0 + \Lambda^1{}_1\sigma_1 & = & \mathbb{1}\sinh u + \sigma_1 \cosh u \\
\mu=2: \ \Lambda^{\nu}{}_{\mu}\sigma_\nu & = & \Lambda^2{}_2\sigma_2 & = & \sigma_2 \\
\mu=3: \ \Lambda^{\nu}{}_{\mu}\sigma_\nu & = & \Lambda^3{}_3\sigma_3 & = & \sigma_3
\end{array}$$

Wir werten nun $\alpha\sigma_\mu\alpha^+$ mit $\alpha = e^{\frac{u}{2}\sigma_1}$ aus und zeigen, daß sich für $\mu = 0, \ldots, 3$ die obigen Ausdrücke $\Lambda^{\nu}{}_{\mu}\sigma_\nu$ ergeben.
Aus $\alpha = e^{\frac{u}{2}\sigma_1}$ folgt: $\alpha^+ = e^{\frac{u}{2}\sigma_1}$, da $\sigma_1{}^+ = \sigma_1$

$\mu$ =0:

$$\begin{aligned}
\alpha\sigma_\mu\alpha^+ &= e^{\frac{u}{2}\sigma_1}\mathbb{1}e^{\frac{u}{2}\sigma_1} = e^{u\sigma_1} \\
&= \cosh(u)\cdot\sigma_0 + \sinh(u)\cdot\sigma_1 \quad \text{nach (6.2)}
\end{aligned}$$

$\mu$ =1:

$$
\begin{aligned}
\alpha\sigma_\mu\alpha^+ &= \mathrm{e}^{\frac{u}{2}\sigma_1}\sigma_1\mathrm{e}^{\frac{u}{2}\sigma_1} \\
&= \mathrm{e}^{\frac{u}{2}\sigma_1}\sigma_1\left(\cosh\left(\tfrac{u}{2}\right)+\sinh\left(\tfrac{u}{2}\right)\cdot\sigma_1\right) \\
&= \mathrm{e}^{\frac{u}{2}\sigma_1}\left(\sigma_1\cosh\left(\tfrac{u}{2}\right)+\sigma_0\sinh\left(\tfrac{u}{2}\right)\right) \\
&\quad (\quad \text{da } {\sigma_1}^2=\sigma_1\cdot\sigma_1=\mathbb{1}=\sigma_0) \\
&= \left(\sigma_0\cosh\left(\tfrac{u}{2}\right)+\sigma_1\sinh\left(\tfrac{u}{2}\right)\right)\times \\
&\quad \times\left(\sigma_1\cosh\left(\tfrac{u}{2}\right)+\sigma_0\sinh\left(\tfrac{u}{2}\right)\right) \\
&= \sigma_1\cosh^2\left(\tfrac{u}{2}\right)+\sigma_1\sinh^2\left(\tfrac{u}{2}\right)+ \\
&\quad +2\cdot\cosh\left(\tfrac{u}{2}\right)\cdot\sinh\left(\tfrac{u}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Mit den Additionstheoremen:

$$
\begin{aligned}
\sinh(x\pm y) &= \sinh(x)\cdot\cosh(y)\pm\cosh(x)\cdot\sinh(y) \\
\cosh(x\pm y) &= \cosh(x)\cdot\cosh(y)\pm\sinh(x)\cdot\sinh(y)
\end{aligned}
$$

speziell:

$$
\begin{aligned}
\sinh(u) &= 2\sinh\left(\tfrac{u}{2}\right)\cdot\cosh\left(\tfrac{u}{2}\right) \\
\cosh(u) &= \cosh^2\left(\tfrac{u}{2}\right)+\sinh^2\left(\tfrac{u}{2}\right)
\end{aligned}
$$

folgt:

$$
\mathrm{e}^{u\sigma_1}\sigma_1\mathrm{e}^{u\sigma_1} = \sigma_1\cosh(u)+\sigma_0\sinh(u)
$$

$\mu$ =2:

$$\begin{aligned}
e^{\frac{u}{2}\sigma_1}\sigma_\mu e^{\frac{u}{2}\sigma_1} &= e^{\frac{u}{2}\sigma_1}\sigma_2 e^{\frac{u}{2}\sigma_1} \\
&= e^{\frac{u}{2}\sigma_1}\sigma_2\left(\cosh\left(\frac{u}{2}\right)+\sinh\left(\frac{u}{2}\right)\cdot\sigma_1\right) \\
&= \left(\sigma_0\cosh\left(\frac{u}{2}\right)+\sigma_1\sinh\left(\frac{u}{2}\right)\right)\times \\
&\quad \times\left(\sigma_2\cosh\left(\frac{u}{2}\right)+\sigma_2\sigma_1\sinh\left(\frac{u}{2}\right)\right) \\
&= \sigma_2\cosh^2\left(\frac{u}{2}\right)+\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sinh^2\left(\frac{u}{2}\right)+ \\
&\quad +\sigma_2\sigma_1\cdot\cosh\left(\frac{u}{2}\right)\cdot\sinh\left(\frac{u}{2}\right)+ \\
&\quad +\sigma_1\sigma_2\sinh\left(\frac{u}{2}\right)\cosh\left(\frac{u}{2}\right)
\end{aligned}$$

Mit den Antivertauschungsrelationen $[\sigma_i,\sigma_j]_+ = \sigma_i\sigma_j+\sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}$ folgt: $[\sigma_1,\sigma_2]_+ = 0 \Rightarrow \sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1$ und

$$\begin{aligned}
e^{\frac{u}{2}\sigma_1}\sigma_2 e^{\frac{u}{2}\sigma_1} &= \sigma_2\cosh^2\left(\frac{u}{2}\right)-\sigma_2\sinh^2\left(\frac{u}{2}\right)+ \\
&\quad +\sigma_2\sigma_1\cdot\cosh\left(\frac{u}{2}\right)\cdot\sinh\left(\frac{u}{2}\right)- \\
&\quad -\sigma_2\sigma_1\cosh\left(\frac{u}{2}\right)\sinh\left(\frac{u}{2}\right) \\
&= \sigma_2\underbrace{\left(\cosh^2\left(\frac{u}{2}\right)-\sinh^2\left(\frac{u}{2}\right)\right)}_{=1} = \sigma_2
\end{aligned}$$

Völlig analog zeigt man:

$\mu$ =3: $e^{\frac{u}{2}\sigma_1}\sigma_3 e^{\frac{u}{2}\sigma_1} = \sigma_3$

Vergleicht man die für die einzelnen $\mu = 0,\ldots,3$ erhaltenen jeweils rechten und linken Seiten von (6.1) auf Seite 37, so stellt man fest, daß gilt:

$$e^{\frac{u}{2}\sigma_1}\sigma_\mu e^{\frac{u}{2}\sigma_1} = \Lambda^\nu{}_\mu\sigma_\nu$$

und damit ist die Aussage für einen Boost in 1-Richtung bewiesen.

Völlig analog geht man beim Beweis für Boosts in 2- und 3-Richtung vor, man muß lediglich $\sigma_1$ durch $\sigma_2$ bzw. $\sigma_3$ ersetzen.

Ferner gilt:

$$\det e^{\frac{u}{2}\sigma_1} = e^{u\sigma_1/2} = e^0 = 1$$

$$\Rightarrow e^{\frac{u}{2}\sigma_1} =: \alpha \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$$

Wir haben also zu jeder Lorentztransformation $\mathcal{L}$ ein $\alpha \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ gefunden mit:

$$\alpha\sigma_\mu\alpha^+ = \Lambda^\nu{}_\mu\sigma_\nu$$

und damit ist gezeigt, daß für $h : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}$

$$\mathrm{Bild}\, h = \mathcal{L}$$

ist.

# Kapitel 7

# Die Darstellung der Überlagerungsgruppe von $\mathcal{P}$ für $s = 1/2$

Nachdem wir nun die Eigenschaften der Überlagerungsabbildung bewiesen haben, können wir die Darstellung von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ konstruieren und anschließend die Strahldarstellung von $\mathcal{L}$ gewinnen:

Dazu definieren wir in Verallgemeinerung der Definition aus [8] (S. 2) sogenannte relativistische Spinoren:

$$\Psi : \mathbb{M} \to \mathbb{C}^2; \;\; \mathbb{M} \text{ Minkowski-Raum}$$

Auf diesen Spinoren ist die Darstellung der $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ in kanonischer Weise definiert:

$$\alpha \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) : \quad \left(\rho_{1/2}(\alpha)\,\Psi\right)(\boldsymbol{x}) := \alpha\Psi\left((h(\alpha))^{-1}\boldsymbol{x}\right)$$

Die Darstellung der Translation wird wie folgt erklärt:

$$\boldsymbol{a} \in \mathbb{M} : \quad \left(\rho_{1/2}(\boldsymbol{a})\,\Psi\right)(\boldsymbol{x}) := \Psi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$$

Damit können wir nun die Darstellung für ein allgemeines Element $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{P}} = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\,Ⓢ_h\mathbb{M}$ angeben:

$$\boxed{\tilde{A} = (\alpha, \boldsymbol{a}) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\,Ⓢ_h\mathbb{M} : \quad \left(\rho_{1/2}\left(\tilde{A}\right)\Psi\right)(\boldsymbol{x}) := \alpha\Psi\left((h(\alpha))^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})\right)}$$

Die Funktion $\Psi$, die sich unter $\rho_{1/2}\left(\tilde{A}\right)$ wie oben verhält, bezeichnet man als Weylspinor und schreibt $\left(\rho_{1/2}\left(\tilde{A}\right), \Psi\right)$.

Wir zeigen nun, daß die so definierte Darstellung $\rho_{1/2}$ tatsächlich die Darstellungseigenschaften erfüllt:

Seien $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2 \in \tilde{\mathcal{P}}$, $\tilde{A}_1 = (\alpha_1, \boldsymbol{a}_1)$, $\tilde{A}_2 = (\alpha_2, \boldsymbol{a}_2) \Rightarrow \tilde{A}_1\tilde{A}_2 = (\alpha_1\alpha_2, h(\alpha_1)\,\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_1)$ denn $h(\alpha_1) \in \mathcal{L}$ und ergibt die zu $\alpha_1$ gehörige Lorentztransformation. Dann soll gelten, daß:

$$\rho_{1/2}\left(\tilde{A}_1\right)\rho_{1/2}\left(\tilde{A}_2\right) = \rho_{1/2}\left(\tilde{A}_1\tilde{A}_2\right) \tag{7.1}$$

Beweis: Wir haben: $\Psi : \mathbb{M} \to \mathbb{C}^2$

$$\begin{aligned}
\left(\rho_{1/2}\left(\tilde{A}_1\right)\rho_{1/2}\left(\tilde{A}_2\right)\Psi\right)(\boldsymbol{x}) &\overset{\text{(i)}}{=} \rho_{1/2}\left(\tilde{A}_1\right)\phi(\boldsymbol{x}) \\
&= \alpha_1\phi\left((h(\alpha_1))^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}_1)\right) \\
&= \alpha_1\left(\rho_{1/2}\left(\tilde{A}_2\right)\Psi\right)\left((h(\alpha_1))^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}_1)\right) \\
&= \alpha_1\alpha_2\Psi\left((h(\alpha_2))^{-1}\left((h(\alpha_1))^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}_1)-\boldsymbol{a}_2\right)\right) \\
&= \alpha_1\alpha_2\Psi\left((h(\alpha_1)\,h(\alpha_2))^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}_1)-\right. \\
&\qquad\qquad \left.-(h(\alpha_2))^{-1}\boldsymbol{a}_2\right)
\end{aligned}$$

Nun ist andererseits:

$$\begin{aligned}
\left(\rho_{1/2}\left(\tilde{A}_1\tilde{A}_2\right)\Psi\right)(\boldsymbol{x}) &= \alpha_1\alpha_2\Psi\left((h(\alpha_1)\,h(\alpha_2))^{-1}(\boldsymbol{x}-h(\alpha_1)\,\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_1)\right) \\
&= \alpha_1\alpha_2\Psi\left((h(\alpha_1)\,h(\alpha_2))^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}_1)-\right. \\
&\qquad\qquad \left.-\overset{-1}{h}(\alpha_2)\,\overset{-1}{h}(\alpha_1)\,h(\alpha_1)\,\boldsymbol{a}_2\right) \\
&= \alpha_1\alpha_2\Psi\left((h(\alpha_1)\,h(\alpha_2))^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}_1)-\overset{-1}{h}(\alpha_2)\,\boldsymbol{a}_2\right)
\end{aligned}$$

Also gilt (7.1) auf der vorherigen Seite, und damit ist die Darstellungeigenschaft bewiesen. Es sei noch einmal daran erinnert, daß die Darstellungeigenschaft die Übertragung des Produktes der Gruppenelemente auf das Produkt der DarstellungsoperatorenindexOperator!Darstellungs- gewährleistet!

Wie bei den skalaren Funktionen suchen wir auch hier wieder nach invarianten Bewegungsgleichungen, deren Lösungen, die oben definierte Darstellung ausreduzieren.

Da unsere Wellenfunktionen 2-komponentige Objekte sind, stehen zur Konstruktion von poincaréinvarianten Operatoren nicht mehr nur $x^\mu$ und $p^\mu$, sondern auch die Spinoperatoren — also die drei Paulimatrizen — zur Verfügung. Erweitert man die Paulimatrizen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ um die Identität und bezeichnet diese mit $\sigma_0$, so hat man einen Satz von 4-Matrizen $\sigma_\mu$; $\mu = 0, \ldots, 3$, die zur Konstruktion von invarianten Operatoren herangezogen werden können. (ACHTUNG! Die $\sigma_\mu$ sind natürlich <u>kein</u> (kovarianter) 4-Vektor im üblichen Sinn.)

$\sigma_\mu\sigma^\mu$ ist nichts Neues, da $\sigma_\mu\sigma^\mu \propto \mathbb{I}$ ist.

(i)

$$\left(\phi(\boldsymbol{x}) := \rho_{1/2}\left(\tilde{A}_2\right)\Psi(\boldsymbol{x})\right)$$

$\sigma_\mu x^\mu$[ii] ist wiederum nicht poincaréinvariant (nicht lorentz- und nicht translationsinvariant).

Die Frage ist, ob $\sigma_\mu p^\mu$ poincaréinvariant in einem geeigneten Sinn ist (analog wie auch $\vec{\sigma}\vec{p}$ rotationsinvariant ist [8]).

Bevor wir fortfahren, führen wir noch den Begriff des Weyloperators $W$ ein: Anstelle von $\sigma_\mu p^\mu = -\mathrm{i}\sigma_\mu \partial^\mu$ betrachtet man nur den Operator $\sigma_\mu \partial^\mu$ und nennt diesen Weyloperator:

Def: Weyloperator $W$

$$\boxed{W := \sigma_\mu \partial^\mu = \sigma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}}$$

$$\text{bzw.: } W = \sigma_0 \partial^0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} = \partial^0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}$$

Def: Konjugierte Darstellung $\overline{\Psi} : \mathbb{M} \to \mathbb{C}^2, \quad \tilde{A} \in \tilde{\mathcal{P}} = \mathrm{SL}\,(2, \mathbb{C})$

$$\boxed{\left(\overline{\rho}_{1/2}\left(\tilde{A}\right)\overline{\Psi}\right)(\boldsymbol{x}) := \overline{\alpha}\overline{\Psi}\left((h\,(\alpha))^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})\right)}$$

$$\overline{\alpha} = \left(\overset{-1}{\alpha}\right)^+ = \left(\alpha^+\right)^{-1}$$

$\left(\overline{\rho}_{1/2}\left(\tilde{A}\right), \overline{\Psi}\right)$ heißt konjugierter Weylspinor. Beachte bei dieser Definition, daß $\overline{\alpha} \neq \alpha$, da im Allgemeinen $\alpha^+ \neq \alpha^{-1}$. ($\alpha$ ist nicht unitär!)

Man zeigt nun wie oben, daß auch $\overline{\rho}_{1/2}\left(\tilde{A}\right)$ die Darstellungseigenschaft besitzt. Es muß lediglich noch gezeigt werden, daß

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{SL}\,(2, \mathbb{C}) \qquad \overline{\alpha}_1 \cdot \overline{\alpha}_2 = \overline{\alpha_1 \cdot \alpha_2}$$

gilt, da bei der obigen Rechnung derartige Produkte von Matrizen vorkommen.

Es ist:

$$\overline{\alpha}_1 \cdot \overline{\alpha}_2 = \left(\overset{-1}{\alpha_1}\right)^+ \left(\overset{-1}{\alpha_2}\right)^+ = \left(\overset{-1}{\alpha_2} \cdot \overset{-1}{\alpha_1}\right)^+ = \left(\alpha_1 \overset{-1}{\cdot} \alpha_2\right)^+ = \overline{\alpha_1 \cdot \alpha_2}$$

wie oben verlangt.

Man stellt nun einen Zusammenhang zwischen $\overline{\alpha}$ und $\Lambda$ her, indem man fordert, daß folgende Beziehung gelten soll:

$$\overline{\alpha}\overline{\sigma}_\mu \overline{\alpha}^+ = \Lambda^\nu{}_\mu \overline{\sigma}_\nu \qquad \Lambda = h\,(\alpha) \text{ wie oben.}$$

Da $\overline{\alpha}$ durch $\overline{\alpha} = \left(\alpha^{-1}\right)^+$ festgelegt ist, stellt die obige Gleichung eine Bedingungsgleichung an $\overline{\sigma}_\mu$ dar, wir haben also $\overline{\sigma}_\mu$ so zu wählen, daß die obige Bedingung erfüllt ist.

Schreibt man nun $\alpha = \mathrm{e}^{\vec{u}\cdot\vec{\sigma}/2}$ (für Boosts) und wählt speziell $\vec{u} = u\vec{e}_1$ ($u$ : Rapidität siehe 5 auf Seite 30) so erhält man:

$$\overline{\alpha} = \left(\overset{-1}{\alpha}\right)^+ = \left(\mathrm{e}^{-\frac{u}{2}\sigma_1}\right)^+ = \mathrm{e}^{-\frac{u}{2}\sigma_1}$$

[ii] Eigentlich müßte man statt $\sigma_\mu x^\mu$, $\sigma_\mu p^\mu$ … die Tensorproduktschreibweise verwenden: $\sigma_\mu \otimes x^\mu$, $\sigma_\mu \otimes p^\mu$ …, da $\sigma_\mu$ und $x^\mu, p^\mu$ in verschiedenen Räumen wirken. Wir werden jedoch der Übersicht halber die schlampige Schreibweise $\sigma_\mu \otimes p^\mu = \sigma_\mu p^\mu$ beibehalten.

(da ${\sigma_1}^+ = \sigma_1$ und $u \in \mathbb{R}$).

Ferner ist für Boosts in 1-Richtung

$$\begin{aligned} \Lambda^0{}_0 &= \cosh u,\ \Lambda^1{}_0 = \sinh u \\ \Lambda^0{}_1 &= \sinh u,\ \Lambda^1{}_1 = \cosh u \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-\frac{u}{2}\sigma_1}\overline{\sigma}_\mu \mathrm{e}^{-\frac{u}{2}\sigma_1} &= \Lambda^\nu{}_\mu \overline{\sigma}_\nu \\ \mu = 0: \quad \mathrm{e}^{-\frac{u}{2}\sigma_1}\overline{\sigma}_0 \mathrm{e}^{-\frac{u}{2}\sigma_1} &= \Lambda^0{}_0\overline{\sigma}_0 + \Lambda^0{}_1\overline{\sigma}_1 \\ &= \cosh u \cdot \overline{\sigma}_0 + \sinh u \cdot \overline{\sigma}_1 \end{aligned}$$

Nun ist: (siehe (6.2) auf Seite 38)

$$\mathrm{e}^{-\frac{u}{2}\sigma_1} = \cosh\left(\frac{u}{2}\right) - \sigma_1 \cdot \sinh\left(\frac{u}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \left[\cosh\left(\tfrac{u}{2}\right) - \sigma_1 \sinh\left(\tfrac{u}{2}\right)\right] \overline{\sigma}_0 \left[\cosh\left(\tfrac{u}{2}\right) - \sigma_1 \sinh\left(\tfrac{u}{2}\right)\right] \stackrel{!}{=} \overline{\sigma}_0 \cosh u + \overline{\sigma}_1 \sinh u \\ \Rightarrow \quad & \overline{\sigma}_0 \cosh^2\left(\tfrac{u}{2}\right) + \sigma_1\overline{\sigma}_0\sigma_1 \sinh^2\left(\tfrac{u}{2}\right) - \\ & -\sigma_1\overline{\sigma}_0 \sinh\left(\tfrac{u}{2}\right)\cosh\left(\tfrac{u}{2}\right) - \overline{\sigma}_0\sigma_1 \cosh\left(\tfrac{u}{2}\right)\sinh\left(\tfrac{u}{2}\right) \stackrel{!}{=} \overline{\sigma}_0 \cosh u + \overline{\sigma}_1 \sinh u \end{aligned}$$

Beachtet man nun die Additionstheoreme der Hyperbelfunktionen (s. auf Seite 39) dann ist klar, daß die obige Gleichung nur erfüllt ist, wenn gilt:

$$\overline{\sigma}_0 = \mathbb{1} = \sigma_0; \quad \overline{\sigma}_1 = -\sigma_1$$

denn dann ist die linke Seite

$$\mathbb{1} \cdot \cosh^2 \frac{u}{2} + \underbrace{(\sigma_1)^2}_{=1} \sinh^2 \frac{u}{2} - 2\sigma_1 \sinh\left(\frac{u}{2}\right) \cosh\left(\frac{u}{2}\right) = \cosh u - \sigma_1 \sinh u$$

Dies ist genau der Ausdruck auf der rechten Seite, wenn $\overline{\sigma}_0 = \sigma_0$ und $\overline{\sigma}_1 = -\sigma_1$ gilt.

Analog kann man nun auch für Boosts in 2- und 3-Richtung verfahren (oder alternativ die $\overline{\sigma}_\mu$ statt durch Boosts durch Drehungen bestimmen).

Man erhält schließlich:

$$\boxed{\overline{\sigma}_0 = \sigma_0; \quad \overline{\sigma}_i = -\sigma_i, \ i = 1, 2, 3}$$

Wir definieren nun den konjugierten Weyloperator $\overline{W}$

<u>Def.:</u>

$$\boxed{\overline{W} := -\overline{\sigma}_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} = -\overline{\sigma}_\mu \partial^\mu = -\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}}$$

Wir gehen nun wie folgt vor: Zunächst beweisen wir einige Fundamentaleigenschaften der $\overline{\sigma}_\mu$ und $\sigma_\mu$ und der Weyloperatoren $W$ und $\overline{W}$. Mit diesen Eigenschaften werden wir dann zeigen, daß $\tilde{\mathcal{P}}(A)$ aus Lösungen der Weyl-Gleichung $W\overline{\Psi}=0$ wiederum Lösungen der Weyl-Gleichung macht! Dies gilt, obwohl der Weyloperator nicht poincaréinvariant im Sinne der Definition von Seite 9 ist, sondern nur die im Folgenden zu beweisende Intertwining-Relation erfüllt.

Anschließend werden wir eine geeignete Kombination der Weyl-Gleichungen (mit $W$ und $\overline{W}$) mit einem zusätzlichen Massenterm versehen und die Dirac-Gleichung gewinnen. Diese ist dann lorentzinvariant im eigentlichen Sinne (s. Seite 9).

# Kapitel 8

# Die Weyl- und die Dirac-Gleichung

Wir beginnen mit einigen Eigenschaften der $\sigma_\mu, \overline{\sigma}_\mu$ und $W, \overline{W}$:

i) $\sigma_\mu \overline{\sigma}_\nu + \sigma_\nu \overline{\sigma}_\mu = 2 \cdot g_{\mu\nu} \cdot \mathbb{1}_2$

$\overline{\sigma}_\mu \sigma_\nu + \overline{\sigma}_\nu \sigma_\mu = 2 \cdot g_{\mu\nu} \cdot \mathbb{1}_2$

ii) $W\overline{W} = \overline{W}W = -\,\Box$

iii) $\left.\begin{array}{rcl} W\overline{\rho}\left(\tilde{A}\right) & = & \rho\left(\tilde{A}\right)W \\ \overline{W}\rho\left(\tilde{A}\right) & = & \overline{\rho}\left(\tilde{A}\right)\overline{W} \end{array}\right\}$(„Intertwining Relation“)

Beweis: zu i) Sei $\mu = \nu = 0$

$$\sigma_\mu = \sigma_0 = \mathbb{1}_2, \qquad \sigma_\nu = \sigma_0 = \mathbb{1}_2$$

$$\overline{\sigma}_\mu = \sigma_0 = \mathbb{1}_2, \qquad \overline{\sigma}_\nu = \sigma_0 = \mathbb{1}_2$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_\mu \overline{\sigma}_\nu + \sigma_\nu \overline{\sigma}_\mu = \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_2 = 2 \cdot \mathbb{1}_2 = 2 g_{00} \mathbb{1}_2$$

$\mu = 0, \quad \nu = k \qquad\qquad k = 1, 2, 3$

$$\sigma_\mu = \sigma_0 = \mathbb{1}_2 \qquad \sigma_\nu = \sigma_k$$

$$\overline{\sigma}_\mu = \mathbb{1}_2, \qquad \overline{\sigma}_\nu = -\,\sigma_k$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_\mu \overline{\sigma}_\nu + \sigma_\nu \overline{\sigma}_\mu = +\mathbb{1}_2 \cdot (-\sigma_k) + \sigma_k \cdot \mathbb{1}_2 = 0 \mathbb{1}_2 = 2 g_{0k} \mathbb{1}_2$$

Analog: $\mu = 0, \quad \nu = k \qquad\qquad k = 1, 2, 3$

$\mu = k, \quad \nu = l$ $\qquad k, l = 1, 2, 3$

$$\sigma_\mu = \sigma_k, \qquad \sigma_\nu = \sigma_l$$

$$\overline{\sigma}_\mu = -\sigma_k, \qquad \overline{\sigma}_\nu = -\sigma_l$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \sigma_\mu \overline{\sigma}_\nu + \sigma_\nu \overline{\sigma}_\mu &= -\sigma_k \sigma_l - \sigma_l \sigma_k \\
&= -(\sigma_k \sigma_l + \sigma_l \sigma_k) \\
&= -\{\sigma_k, \sigma_l\} = -2\delta_{kl} \mathbb{1}_2 \quad \text{(s. [8], S. 18)} \\
&= 2 g_{kl} \mathbb{1}_2
\end{aligned}$$

Analog beweist man die andere Beziehung!

zu ii) Es ist:

$$\begin{aligned}
W\overline{W} &= -\sigma^\mu \partial_\mu \overline{\sigma}^\nu \partial_\nu \\
&= -\sigma^\mu \overline{\sigma}^\nu \partial_\mu \partial_\nu && \text{(da } \partial_\mu \text{ nicht auf } \overline{\sigma}^\nu \text{ wirkt.)} \\
&= -\left(\tfrac{1}{2}\sigma^\mu \overline{\sigma}^\nu \partial_\mu \partial_\nu + \tfrac{1}{2}\sigma^\nu \overline{\sigma}^\mu \partial_\nu \partial_\mu\right) && \text{(im 2. Summanden sind } \mu \text{ und } \nu \text{ vertauscht, die Struktur jedoch erhalten.)} \\
&= -\left(\tfrac{1}{2}\sigma^\mu \overline{\sigma}^\nu \partial_\mu \partial_\nu + \tfrac{1}{2}\sigma^\nu \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \partial_\nu\right) && \text{(da } \partial_\nu \partial_\mu = \partial_\mu \partial_\nu \text{.)} \\
&= -\tfrac{1}{2} \underbrace{\left(\sigma^\mu \overline{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \overline{\sigma}^\mu\right)}_{= 2g^{\mu\nu}\mathbb{1} \text{ (aus i))}} \partial_\mu \partial_\nu \\
&= -g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = -\partial^\nu \partial_\nu = -\Box && \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

zu iii) Da $W = \sigma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \sigma_\mu \partial^\mu$ gilt und $\sigma_\mu$ nur auf dem Spin- und $\partial^\mu$ auf dem Ortsanteil wirkt, zerlegen wir auch $\rho\left(\tilde{A}\right)$ in ein (Tensor-) Produkt aus Spin- und Ortsanteil:

$$\rho\left(\tilde{A}\right) = \rho_S(\alpha) \otimes \rho_O\left(\tilde{A}\right)$$

Dabei wirken $\rho_S(\alpha)$ und $\rho_O\left(\tilde{A}\right)$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
a \in \mathbb{C}^2: &\qquad \rho_S(\alpha)\, a &&= \alpha a \\
\phi(\boldsymbol{x}): &\qquad \left(\rho_O\left(\tilde{A}\right)\phi\right)(\boldsymbol{x}) &&= \phi\left((h(\alpha))^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})\right)
\end{aligned}$$

Da wir nun mit Produkten aus Orts- und Spinanteil arbeiten, haben wir für $\rho\left(\tilde{A}\right)$ (analog zu [8] S.11)

$$\begin{aligned}
\rho\left(\tilde{A}\right)\phi(\boldsymbol{x}) &= \left(\rho_S(\alpha) \otimes \rho_O\left(\tilde{A}\right)\right)(a \otimes \phi(\boldsymbol{x})) \\
&= (\rho_S(\alpha)\, a) \otimes \left(\rho_O\left(\tilde{A}\right)\phi(\boldsymbol{x})\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha a \otimes \phi\left(\left(h\left(\alpha\right)\right)^{-1}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\right)\right) \\
&= \alpha \Psi\left(\left(h\left(\alpha\right)\right)^{-1}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Um nun beispielsweise $W\rho\left(\tilde{A}\right)$ umformen zu können, behandeln wir den Spin- und den Ortsanteil separat. Wir zeigen zunächst:

i) $\rho_S\left(\alpha\right)\sigma_\mu\left(\overline{\rho_S}\left(\alpha\right)\right)^{-1} = \Lambda^\nu{}_\mu\sigma_\nu$

ii) $\left(\rho_O\left(\tilde{A}\right)\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\rho_O\left(\tilde{A}\right) = \Lambda^\mu{}_\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu}$

i) sieht man leicht ein, denn es ist:

$$
\rho_S\left(\alpha\right)\sigma_\mu\left(\overline{\rho_S}\left(\alpha\right)\right)^{-1} = \alpha\sigma_\mu \overset{-1}{\overline{\alpha}} = \alpha\sigma_\mu\alpha^+ = \Lambda^\nu{}_\mu\sigma_\nu
$$

ii) hingegen ist nicht so leicht zu zeigen, da man dazu etwas „Indexgymnastik“ betreiben muß.
Zunächst muß das Transformationsgesetz für kovariante 4-Vektoren bewiesen werden.

Sei $x'^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x^\nu$; dann ist $x'_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu x_\nu$.
Wir gehen bei dem Transformationsgesetz von $\Lambda^{-1}$ aus, da wir bei der Anwendung $\rho_O\left(\tilde{A}\right)\Psi\left(\boldsymbol{x}\right)$ den Vektor $\Lambda^{-1}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\right)$ im Argument von $\Psi$ stehen haben; diesen Vektor benötigen wir in Komponentenschreibweise, um $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ berechnen zu können.

Beweis des Transformationsgesetzes:

$$
\begin{aligned}
x'^\mu &= \left(\overset{-1}{\Lambda}\right)^\mu{}_\nu x^\nu \\
\Rightarrow \quad x'_\mu &= g_{\mu\sigma}\left(\overset{-1}{\Lambda}\right)^\sigma{}_\nu x^\nu = g_{\mu\sigma}\left(\overset{-1}{\Lambda}\right)^\sigma{}_\kappa g^{\kappa\nu}x_\nu
\end{aligned}
\tag{8.1}
$$

Um $g_{\mu\sigma}(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\kappa$ auswerten zu können, benutzen wir eine Eigenschaft, der $\Lambda$-Matrizen, die sich in jedem Buch über spezielle Relativitätstheorie (z.B. [9]) findet:

$$
\boxed{g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}}
$$

(Dies folgt direkt aus $g\left(\Lambda x, \Lambda x\right) = g\left(x, x\right)$)

Durch Multiplikation mit $(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\kappa$ (und Summation über $\sigma$) folgt:

$$
g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\underbrace{\Lambda^\nu{}_\sigma\left(\overset{-1}{\Lambda}\right)^\sigma{}_\kappa}_{\delta^\nu{}_\kappa} = g_{\rho\sigma}\left(\overset{-1}{\Lambda}\right)^\sigma{}_\kappa
$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad g_{\rho\sigma}\left(\overset{-1}{\Lambda}\right)^{\sigma}{}_{\kappa} &= g_{\mu\nu}\delta^{\nu}{}_{\kappa}\Lambda^{\mu}{}_{\rho} \\ &= g_{\mu\kappa}\Lambda^{\mu}{}_{\rho} \end{aligned}$$

Also ist:

$$\boxed{g_{\rho\sigma}\left(\overset{-1}{\Lambda}\right)^{\sigma}{}_{\kappa} = g_{\mu\kappa}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}}$$

Mithin ($\rho \to \mu; \quad \mu \to \lambda$):

$$g_{\mu\sigma}\left(\overset{-1}{\Lambda}\right)^{\sigma}{}_{\kappa} = g_{\lambda\kappa}\Lambda^{\lambda}{}_{\mu}$$

und $\underbrace{x'_\mu = g_{\mu\sigma}\left(\overset{-1}{\Lambda}\right)^{\sigma}{}_{\kappa} g^{\kappa\nu}x_\nu}_{((8.1))}$ wird zu:

$$\begin{aligned} x'_\mu &= g_{\lambda\kappa}\Lambda^{\lambda}{}_{\mu}g^{\kappa\nu}x_\nu \\ &= \Lambda^{\lambda}{}_{\mu}\underbrace{g_{\lambda\kappa}g^{\kappa\nu}}_{\delta^{\nu}{}_{\lambda}}x_\nu \\ \Rightarrow \quad x'_\mu &= \Lambda^{\nu}{}_{\mu}x_\nu \end{aligned}$$

An dieser Stelle soll davor gewarnt werden, die Vektor-Matrix-Gleichung

$$\boldsymbol{x}' = \Lambda\boldsymbol{x}$$

für kontra- und kovariante Vektoren in der gleichen Weise zu schreiben.
Es gilt für kontravariante Vektoren[(i)]: (per Konvention festgelegt)

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$$

Dies kann suggerieren, daß man für kovariante Vektoren schreiben möchte[(i)]

$$x'_\mu = \Lambda^{\nu}{}_{\mu}x_\nu$$

Diese Gleichung ist jedoch FALSCH, wie wir oben gesehen haben. Statt dessen muß [(i)]

$$x'_\mu = \left(\overset{-1}{\Lambda}\right)^{\nu}{}_{\mu}x_\nu$$

gelten.
Dieses Beispiel zeigt eindringlich, daß man beim Übergang von kontra- zu kovarianten Komponenten vorsichtig sein muß und Indizes nur mit dem metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ verschieben sollte!
Nach dieser Vorbereitung können wir ii) beweisen.

[(i)] **Bitte beachten Sie, daß hier im Vergleich zum obigen Beweis die Rolle von $x$ und $x'$, also auch die von $\Lambda$ und $\Lambda^{-1}$ vertauscht sind!**

Es ist:

$$\begin{aligned}\left(\partial^\mu \rho_O\left(\tilde{A}\right)\Psi\right)(\boldsymbol{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_\mu}\Psi\left((h(\alpha))^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x_\mu}\Psi(\boldsymbol{x}') \quad \text{mit } \boldsymbol{x}' = (h(\alpha))^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\\ &= \frac{\partial}{\partial x'_\lambda}\Psi(\boldsymbol{x}')\frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\mu}\end{aligned}$$

in Komponenten gilt (nach unserer Vorbereitung)[(i)]:

$$x'^\lambda = \left((h(\alpha))^{-1}\right)^\lambda{}_\nu (x_\nu - a_\nu)$$

und

$$x'_\lambda = (h(\alpha))^\nu{}_\lambda (x_\nu - a_\nu) \quad (!!)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\mu} = (h(\alpha))^\nu{}_\lambda \delta_{\nu\mu} = (h(\alpha))^\mu{}_\lambda = \Lambda^\mu{}_\lambda; \quad \Lambda \in \boldsymbol{\mathcal{L}} \text{ (s.o.)}$$

Also ist:

$$\begin{aligned}\left(\partial^\mu \rho_O\left(\tilde{A}\right)\Psi\right)(\boldsymbol{x}) &= \Lambda^\mu{}_\lambda \frac{\partial}{\partial x'_\lambda}\Psi(\boldsymbol{x}')\\ \Rightarrow \left(\left(\rho_O\left(\tilde{A}\right)\right)^{-1}\partial^\mu \rho_O\left(\tilde{A}\right)\Psi\right)(\boldsymbol{x}) &= \Lambda^\mu{}_\lambda \left(\rho_O\left(\tilde{A}\right)\right)^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x'_\lambda}\Psi(\boldsymbol{x}')\right)\\ &= \Lambda^\mu{}_\lambda \left[\frac{\partial}{\partial x'_\lambda}\Psi(\boldsymbol{x}')\right]\Bigg|_{\boldsymbol{x}'\to h(\alpha)\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{a}}\end{aligned}$$

Die Ersetzung $\boldsymbol{x}' \to h(\alpha)\,\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}$ ist die Wirkung von $\left(\rho_O\left(\tilde{A}\right)\right)^{-1}$ auf $\frac{\partial}{\partial x'_\lambda}\Psi(\boldsymbol{x}')$.

Wir finden schließlich

$$\left(\left(\rho_O\left(\tilde{A}\right)\right)^{-1}\partial^\mu \rho_O\left(\tilde{A}\right)\Psi\right)(\boldsymbol{x}) = \Lambda^\mu{}_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\Psi(\boldsymbol{x})$$

und somit

$$\left(\rho_O\left(\tilde{A}\right)\right)^{-1}\partial^\mu \rho_O\left(\tilde{A}\right) = \Lambda^\mu{}_\nu \partial^\nu$$

und damit ist auch (ii) bewiesen.

Um nun die Intertwining Relation zu beweisen, ersetzen wir in (i) $\Lambda$ durch $\Lambda^{-1}$ und erhalten mit

$$\rho_S\left(\overset{-1}{\alpha}\right) = (\rho_S(\alpha))^{-1}$$

(wegen der Darstellungseigenschaft $\rho_S(A\cdot B) = \rho_S(A)\cdot\rho_S(B)$ muß $\rho_S(\alpha^{-1})\cdot\rho_S(\alpha) = \mathbb{1}$ sein, mithin folgt $\rho_S(\alpha^{-1}) = (\rho_S(\alpha))^{-1}$)
und

$$\left(\overline{\rho}_S\left(\overset{-1}{\alpha}\right)\right)^{-1} = \overline{\rho_S}(\alpha)$$

$$\left(\rho_S(\alpha)\right)^{-1}\sigma_\mu\overline{\rho_S}(\alpha)=\left(\overset{-1}{\Lambda}\right)^{\nu}_{\ \mu}\sigma_\nu \tag{8.2}$$

und

$$\left(\rho_O\left(\tilde{A}\right)\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\rho_O\left(\tilde{A}\right)=\Lambda^\mu{}_\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu} \tag{8.3}$$

Bildet man das Tensorprodukt dieser beiden Zeilen, so benötigt man folgende Regel:

$$\forall A_1,B_1,C_1:V_1\to V_1;\quad A_2,B_2,C_2:V_2\to V_2:$$

$$A_1B_1C_1\otimes A_2B_2C_2=\left(A_1\otimes A_2\right)\left(B_1\otimes B_2\right)\left(C_1\otimes C_2\right)$$

denn es ist für beliebige $\phi_1\otimes\phi_2\in V_1\otimes V_2$

$$\begin{aligned}(A_1\otimes A_2)(B_1\otimes B_2)(C_1\otimes C_2)\quad(\phi_1\otimes\phi_2)=&\\ &=(A_1\otimes A_2)(B_1\otimes B_2)(C_1\phi_1\otimes C_2\phi_2)\\ &=(A_1\otimes A_2)(B_1C_1\phi_1\otimes B_2C_2\phi_2)\\ &=(A_1B_1C_1\phi_1\otimes A_2B_2C_2\phi_2)\\ &=(A_1B_1C_1\otimes A_2B_2C_2)(\phi_1\otimes\phi_2)\end{aligned}$$

Dann ist: (8.2) $\otimes$ (8.3)

$$\left(\left(\rho_S(\alpha)\right)^{-1}\sigma_\mu\overline{\rho_S}(\alpha)\right)\otimes\left(\left(\rho_O\left(\tilde{A}\right)\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\rho_O\left(\tilde{A}\right)\right)=$$

$$=\underbrace{\left(\overset{-1}{\Lambda}\right)^{\lambda}_{\ \mu}\Lambda^\mu{}_\nu}_{=\delta^\lambda{}_\nu}\sigma_\lambda\otimes\frac{\partial}{\partial x_\nu}$$

$$\Rightarrow\left(\text{mit obiger Regel und } V_1=\mathbb{C}^2, V_2=L^2\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$$

$$\underbrace{\left(\left(\rho_S(\alpha)\right)^{-1}\otimes\left(\rho_O\left(\tilde{A}\right)\right)^{-1}\right)}_{=\left(\rho\left(\tilde{A}\right)\right)^{-1}}\left(\sigma_\mu\otimes\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)\underbrace{\left(\overline{\rho_S}(\alpha)\otimes\rho_O\left(\tilde{A}\right)\right)}_{=\overline{\rho}\left(\tilde{A}\right)}=\sigma_\nu\otimes\frac{\partial}{\partial x_\nu}$$

$$\Rightarrow\quad\left(\rho\left(\tilde{A}\right)\right)^{-1}\underbrace{\sigma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}}_{=W}\overline{\rho}\left(\tilde{A}\right)=\sigma_\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu}$$

beziehungsweise:

$$\boxed{W\overline{\rho}\left(\tilde{A}\right)=\rho\left(\tilde{A}\right)W}$$

Und damit ist die Intertwining-Relation bewiesen.

Wir wollen nun noch die Intertwining-Relation für $\overline{W}$ beweisen.

Es ist:

$$\overline{\rho_S}\left(\alpha\right)\overline{\sigma}_{\mu}\overset{-1}{\rho}_{S}\left(\alpha\right)=\Lambda^{\nu}{}_{\mu}\overline{\sigma}_{\nu}$$

denn

$$\overline{\rho_S}\left(\alpha\right)\overline{\sigma}_{\mu}\overset{-1}{\rho}_{S}\left(\alpha\right)=\overline{\alpha}\overline{\sigma}_{\mu}\overline{\alpha}^{+}=\Lambda^{\nu}{}_{\mu}\overline{\sigma}_{\nu}$$

Durch Übergang von $\alpha\rightarrow\alpha^{-1}$ erhält man:

$$\begin{aligned}\overline{\rho}_S\left(\overset{-1}{\alpha}\right)\overline{\sigma}_{\mu}\overset{-1}{\rho}_{S}\left(\overset{-1}{\alpha}\right) &= \left(\overset{-1}{\Lambda}\right)^{\nu}_{\mu}\overline{\sigma}_{\nu}\\ \Rightarrow\quad\left(\overline{\rho}_S\left(\alpha\right)\right)^{-1}\overline{\sigma}_{\mu}\rho_S\left(\alpha\right) &= \left(\overset{-1}{\Lambda}\right)^{\nu}_{\mu}\overline{\sigma}_{\nu}\end{aligned}$$

Ferner hatten wir gezeigt, daß gilt:

$$\left(\rho_O\left(\tilde{A}\right)\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\rho_O\left(\tilde{A}\right)=\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\frac{\partial}{\partial x_{\nu}}$$

Bilden der entsprechenden Tensorprodukte liefert:

$$\begin{aligned}\left(\overline{\rho}\left(\tilde{A}\right)\right)^{-1}\overline{\sigma}_{\mu}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\rho\left(\tilde{A}\right) &= \left(\overset{-1}{\Lambda}\right)^{\alpha}_{\mu}\overline{\sigma}_{\alpha}\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\frac{\partial}{\partial x_{\nu}}\\ &= \delta^{\alpha}{}_{\nu}\overline{\sigma}_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_{\nu}}=\overline{\sigma}_{\nu}\frac{\partial}{\partial x_{\nu}}\end{aligned}$$

denn $\left(\overline{\rho}\left(\tilde{A}\right)\right)^{-1}=\overline{\rho_S}\left(\alpha\right)\otimes\rho_O\left(\tilde{A}\right)$, da die $\overline{\phantom{x}}$-Operation nur für Matrizen in $\mathbb{C}^2$ erklärt ist.

$$\Rightarrow\quad\left(\overline{\rho}\left(\tilde{A}\right)\right)^{-1}\overline{W}\rho\left(\tilde{A}\right)=\overline{W}$$

$$\left(\text{da }\overline{W}=-\overline{\sigma}_{\mu}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}=-\overline{\sigma}_{\mu}\partial^{\mu}\right)$$

$$\Rightarrow\quad\boxed{\overline{W}\rho\left(\tilde{A}\right)=\overline{\rho}\left(\tilde{A}\right)\overline{W}}$$

Dies ist die 2. Intertwining-Relation.

Diese Beziehungen erweisen sich im folgenden als fundamental, so daß sich der Aufwand für ihren Beweis gelohnt hat, denn weitere längere Rechnungen werden nicht mehr vorkommen.

Als erstes benutzen wir die Intertwining-Relation, um folgenden Sachverhalt zu zeigen:

Behauptung.: Sei $\overline{\Psi}\left(\boldsymbol{x}\right)$ eine Lösung der Weyl-Gleichung $W\overline{\Psi}\left(\boldsymbol{x}\right)=0$; dann ist auch $\overline{\rho}\left(\tilde{A}\right)\overline{\Psi}\left(\boldsymbol{x}\right)$ eine Lösung, das heißt es gilt dann auch:

$$W\overline{\rho}\left(\tilde{A}\right)\overline{\Psi}\left(\boldsymbol{x}\right)=0$$

Beweis: Dies sieht man sofort über die Intertwining-Relation ein:

Sei also: $W\overline{\Psi}(\boldsymbol{x}) = 0$

Dann ist $W\overline{\rho}\left(\tilde{A}\right)\overline{\Psi}(\boldsymbol{x}) \underbrace{=}_{\text{Intertwining-Relation}} \rho\left(\tilde{A}\right) \underbrace{W\overline{\Psi}(\boldsymbol{x})}_{=0 \text{ n. Vor.}} = 0$

$\Rightarrow$ Die Menge aller Lösungen der Weyl-Gleichung bildet einen (poincaré-)invarianten Unterraum von $\mathbb{C}^2 \otimes L^2(\mathbb{R}^3)$.

Ein analoges Resultat gilt für die Lösungen der konjugierten Weyl-Gleichung

$\overline{W}\Psi(\boldsymbol{x}) = 0$, denn $\overline{W}\rho\left(\tilde{A}\right)\Psi(\boldsymbol{x}) = \overline{\rho}\left(\tilde{A}\right)\overline{W}\Psi(\boldsymbol{x}) = 0$

Diese Räume kann man nun zu (physikalischen) Hilberträumen erweitern, indem man sie mit einem geeignetem Skalarprodukt (das heißt einem Skalarprodukt, bezüglich welchem $\rho\left(\tilde{A}\right)$ unitär ist) ausstattet.

Das Skalarprodukt finden wir wieder durch die Methode des erhaltenen Stromes. Wir suchen also Ströme $j^\mu[\Psi]$, $\quad j^\mu\left[\overline{\Psi}\right]$, die vom Weylspinor $\overline{\Psi}$, beziehungsweise dem konjugierten $\Psi$ abhängen und die Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial}{\partial x_\mu} j_\mu(\boldsymbol{x};\Psi) = 0$, (beziehungsweise $\frac{\partial}{\partial x_\mu} j_\mu\left(\boldsymbol{x};\overline{\Psi}\right) = 0$) erfüllen, falls $\overline{\Psi}$ die Weyl-Gleichung beziehungsweise $\Psi$ die konjugierte Weyl-Gleichung löst.

Da nach Voraussetzung $W\overline{\Psi}(\boldsymbol{x}) = 0$ sein soll, ist also $\sigma_\mu \partial^\mu \overline{\Psi}(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \Rightarrow$

$\partial^\mu\left(\sigma_\mu \overline{\Psi}(\boldsymbol{x})\right) = 0$, da $\sigma$ koordinatenunabhängig ist.

Dies legt nahe, den erhaltenen Strom wie folgt zu definieren:

$$\boxed{j_\mu\left(\boldsymbol{x};\overline{\Psi}\right) := \left\langle \overline{\Psi}, \sigma_\mu \overline{\Psi} \right\rangle_{\mathbb{C}^2}}$$

beziehungsweise:

$$j_\mu(\boldsymbol{x};\Psi) := \langle \Psi, \overline{\sigma}_\mu \Psi \rangle_{\mathbb{C}^2}$$

Mit dieser Definition ist:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_\mu} j_\mu\left(\boldsymbol{x};\overline{\Psi}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\langle \overline{\Psi}, \sigma_\mu \overline{\Psi} \right\rangle \\
&= \left\langle \partial^\mu \overline{\Psi}, \sigma_\mu \overline{\Psi} \right\rangle + \left\langle \overline{\Psi}, \partial^\mu \sigma_\mu \overline{\Psi} \right\rangle \\
&= \left\langle \partial^\mu \overline{\Psi}, \sigma_\mu \overline{\Psi} \right\rangle + \left\langle \overline{\Psi}, \underbrace{W\overline{\Psi}}_{=0 \text{ n. Vor.}} \right\rangle \\
&= \left\langle \partial^\mu \overline{\Psi}, \sigma_\mu \overline{\Psi} \right\rangle = \left\langle (\sigma_\mu)^+ \partial^\mu \overline{\Psi}, \overline{\Psi} \right\rangle \\
\left(\text{da } {\sigma_\mu}^+ = \sigma_\mu\right) \qquad &= \left\langle \sigma_\mu \partial^\mu \overline{\Psi}, \overline{\Psi} \right\rangle \\
&= \left\langle W\overline{\Psi}, \overline{\Psi} \right\rangle = 0 \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Analog beweist man $\frac{\partial}{\partial x_\mu} j_\mu(\boldsymbol{x};\Psi)=0$

Ferner finden wir, daß, falls $W\overline{\Psi}=0$ gilt, auch

$$\Box\overline{\Psi}=\overline{W}W\overline{\Psi}=0$$

und

$$\Box\Psi=W\overline{W}\Psi=0$$

gilt.

Vergleicht man dieses Ergebnis mit der Klein-Gordon-Gleichung, so sieht man, daß sich die Lösungen der Weyl-Gleichung und der konjugierten Weyl-Gleichung als Teilchen mit Masse $m=0$ und Spin $S=1/2$ interpretieren lassen.

| Die Lösungen der Weyl-Gleichung führen also auf Darstellungen der Poincaré-Gruppe, die durch Masse 0 und Spin 1/2 charakterisiert werden! |
|---|

Abschließend bleibt zu bemerken, daß der Weyloperator $W$ nicht paritätsinvariant ist:

$$\begin{aligned}
\overset{-1}{P}\,WP &= \overset{-1}{P}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\right)P\\
&= \frac{\partial}{\partial t}-\overset{-1}{P}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}P\\
&= \frac{\partial}{\partial t}-\underbrace{\overset{-1}{P}\,\vec{\sigma}P}_{=\vec{\sigma}}\;\underbrace{\overset{-1}{P}\,\vec{\nabla}P}_{=\,-\vec{\nabla}}\\
&= \frac{\partial}{\partial t}+\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}=\,-\overline{W}\neq W
\end{aligned}$$

so daß Teilchen mit Masse 0 und Spin 1/2 die Parität bei Wechselwirkungen verletzen.

Beispiele für Teilchen mit Masse 0 und Spin 1/2 sind (wahrscheinlich) die Neutrinos $\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau$ und ihre Antiteilchen $\overline{\nu}_e,\overline{\nu}_\mu,\overline{\nu}_\tau$.

Will man nun die Weyl-Gleichung um einen Massenterm erweitern (gruppentheoretisch gesprochen: Darstellung für Masse $m$ und Spin 1/2), so stellt man zunächst fest, daß $\rho\left(\tilde{A}\right)$ aus Lösungen der entsprechenden Gleichung <u>nicht</u> wieder Lösungen macht!

Denn geht man zunächst von folgender Gleichung aus:

$$(W+m)\,\overline{\Psi}(\boldsymbol{x})=0 \tag{8.4}$$

dann findet man:

$$\begin{aligned}
(W+m)\,\overline{\rho}\left(\tilde{A}\right)\overline{\Psi}(\boldsymbol{x}) &= W\overline{\rho}\left(\tilde{A}\right)\overline{\Psi}(\boldsymbol{x})+m\overline{\rho}\left(\tilde{A}\right)\overline{\Psi}(\boldsymbol{x})\\
&= \underbrace{\rho\left(\tilde{A}\right)W\overline{\Psi}(\boldsymbol{x})}_{\text{aus Intertwining-Relation}}\quad\underbrace{-\overline{\rho}\left(\tilde{A}\right)W\overline{\Psi}(\boldsymbol{x})}_{\text{aus (8.4)}}\\
&= \left(\rho\left(\tilde{A}\right)-\overline{\rho}\left(\tilde{A}\right)\right)W\overline{\Psi}(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

Nun ist aber $\overline{\rho}\left(\tilde{A}\right) \neq \rho\left(\tilde{A}\right)$ (s.o.), so daß $\rho\left(\tilde{A}\right) - \overline{\rho}\left(\tilde{A}\right) \neq 0$ und folglich auch:

$$(W+m)\,\overline{\rho}\left(\tilde{A}\right)\overline{\Psi}(\boldsymbol{x}) = \left(\rho\left(\tilde{A}\right) - \overline{\rho}\left(\tilde{A}\right)\right) W\overline{\Psi}(\boldsymbol{x}) \neq 0$$

Andererseits gilt aber, daß wenn $\Psi$ sich wie ein Weylspinor transformiert, daß dann $\overline{W}\Psi$ sich wie ein <u>konjugierter</u> Weylspinor verhält:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Sei} & \Psi(\boldsymbol{x}) & \overset{\tilde{\mathcal{P}}}{\to} & \rho\left(\tilde{A}\right)\Psi(\boldsymbol{x}) \\ \Rightarrow & \overline{W}\Psi(\boldsymbol{x}) & \overset{\tilde{\mathcal{P}}}{\to} & \overline{W}\rho\left(\tilde{A}\right)\Psi(\boldsymbol{x}) = \overline{\rho}\left(\tilde{A}\right)\overline{W}\Psi(\boldsymbol{x}) \end{array}$$

das heißt $\overline{W}\Psi(\boldsymbol{x})$ hat unter $\tilde{\mathcal{P}}$ das Verhalten eines konjugierten Weyl-Spinors.

Analog ist:

$$\begin{array}{rcl} \overline{\Psi}(\boldsymbol{x}) & \overset{\tilde{\mathcal{P}}}{\to} & \overline{\rho}\left(\tilde{A}\right)\overline{\Psi}(\boldsymbol{x}) \\ W\overline{\Psi}(\boldsymbol{x}) & \overset{\tilde{\mathcal{P}}}{\to} & W\overline{\rho}\left(\tilde{A}\right)\overline{\Psi}(\boldsymbol{x}) = \rho\left(\tilde{A}\right)W\overline{\Psi}(\boldsymbol{x}) \end{array}$$

ein $\overline{W}$ angewandt auf einen konjugierten Weylspinor hat das gleiche Transformationsverhalten wie ein „normaler“ Weylspinor.

Das unterschiedliche Transformationsverhalten von $\overline{\Psi}$ und $W\overline{\Psi}$ ist letzlich auch die Ursache dafür, daß die Erweiterung der Weyl-Gleichung mit einem Massenterm, wie sie in (8.4) auf der vorhergehenden Seite vorgenommen wurde, nicht die gewünschten Eigenschaften besitzt. Vielmehr muß man zu $W\overline{\Psi}$ den Spinor $\Psi$ addieren:

$$W\overline{\Psi}(\boldsymbol{x}) + m\Psi(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{8.5}$$

Analog kann man auch die konjugierte Gleichung aufstellen, dabei erweitert man $\overline{W}\Psi(\boldsymbol{x}) = 0$ durch den Massenterm $m\overline{\Psi}(\boldsymbol{x})$ und erhält:

$$\overline{W}\Psi(\boldsymbol{x}) + m\overline{\Psi}(\boldsymbol{x}) = 0$$

Wenn nun $\Psi$ und $\overline{\Psi}$ dieses Gleichungssystem erfüllen gilt:

$$\begin{aligned} W\overline{\rho}\left(\tilde{A}\right)\overline{\Psi}(\boldsymbol{x}) + m\rho\left(\tilde{A}\right)\Psi(\boldsymbol{x}) &= \\ \rho\left(\tilde{A}\right)\left(W\Psi(\boldsymbol{x}) + m\overline{\Psi}(\boldsymbol{x})\right) &= 0 \end{aligned}$$

Ein analoges Resultat erhält man für die zweite Gleichung. Daraus folgt, daß mit $\Psi, \overline{\Psi}$ auch $\rho\Psi, \overline{\rho}\overline{\Psi}$ Lösungen dieses Gleichungssystem sind.

Wir fassen nun die „normale“ und die konjugierte Weyl-Gleichung mit Massenterm zusammen:

$$\begin{aligned} W\overline{\Psi}(\boldsymbol{x}) + m\Psi(\boldsymbol{x}) &= 0 \\ \overline{W}\Psi(\boldsymbol{x}) + m\overline{\Psi}(\boldsymbol{x}) &= 0 \end{aligned}$$

Dann definieren wir einen Dirac-Spinor $\Psi_D$:

$$\Psi_D : \mathbb{M} \to \mathbb{C}^4; \qquad \Psi_D(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} \Psi(\boldsymbol{x}) \\ \overline{\Psi}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

Mit diesem Dirac-Spinor schreiben sich die obigen Gleichungen:

$$D \begin{pmatrix} \Psi(\boldsymbol{x}) \\ \overline{\Psi}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} + m \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{C}^4} \begin{pmatrix} \Psi(\boldsymbol{x}) \\ \overline{\Psi}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = 0; \qquad \mathbb{1}_{\mathbb{C}^4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$D := \begin{pmatrix} 0 & W \\ \overline{W} & 0 \end{pmatrix}$$

oder mit der (üblichen) Abkürzung $m\mathbb{1}_{\mathbb{C}^4} = m$

$$\boxed{D\Psi_D(\boldsymbol{x}) + m\Psi_D(\boldsymbol{x}) = 0} \text{ oder } \boxed{(D+m)\,\Psi_D(\boldsymbol{x}) = 0}$$

Das ist die freie Dirac-Gleichung!

Bevor wir die explizite Gestalt von $D$ angeben und die Dirac-Gleichung in der Form schreiben, die sich üblicherweise in den Büchern findet, diskutieren wir das Transformationsverhalten von $\Psi_D(\boldsymbol{x})$ und $D+m$ unter Poincaré-Transformationen.

Die Darstellung $\rho_D\left(\tilde{A}\right)$ auf Dirac-Spinoren ist erklärt durch:

$$\boxed{\left(\rho_D\left(\tilde{A}\right)\Psi_D\right)(\boldsymbol{x}) = S(\alpha)\,\Psi_D\left((h(\alpha))^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\right)}$$

mit: $S(\alpha) : = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$

Diese Darstellung erhält man aus der Darstellung auf Weyl-Spinoren wie folgt:

$$\begin{aligned}
\left(\rho\left(\tilde{A}\right)\Psi\right)(\boldsymbol{x}) &= \alpha\Psi\left((h(\alpha))^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\right) \\
\left(\overline{\rho}\left(\tilde{A}\right)\overline{\Psi}\right)(\boldsymbol{x}) &= \overline{\alpha}\overline{\Psi}\left((h(\alpha))^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\right) \\
\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \rho\left(\tilde{A}\right) & 0 \\ 0 & \overline{\rho}\left(\tilde{A}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi(\boldsymbol{x}) \\ \overline{\Psi}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi\left((h(\alpha))^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\right) \\ \overline{\Psi}\left((h(\alpha))^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\right) \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \quad \rho_D\left(\tilde{A}\right)\Psi_D(\boldsymbol{x}) &= S(\alpha)\,\Psi_D\left((h(\alpha))^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\right)
\end{aligned}$$

wobei $\rho_D\left(\tilde{A}\right) = \begin{pmatrix} \rho\left(\tilde{A}\right) & 0 \\ 0 & \overline{\rho}\left(\tilde{A}\right) \end{pmatrix}$

Wir zeigen nun die Poincaré-Invarianz von $D + m\mathbb{1}_{\mathbb{C}^4}$:

Für die Identität ist die Poincaré-Invarianz klar.

Es bleibt zu zeigen, daß:

$$\rho_D\left(\tilde{A}\right)D = D\rho_D\left(\tilde{A}\right) \tag{8.6}$$

$$\text{bzw.}\quad \rho_D\left(\tilde{A}\right)D\left(\rho_D\left(\tilde{A}\right)\right)^{-1} = D$$

<u>Beweis.:</u> Mit den Formeln für $D$ und $\rho_D$ hat man

$$\begin{aligned}
\rho_D\left(\tilde{A}\right)D\left(\rho_D\left(\tilde{A}\right)\right)^{-1} &= \begin{pmatrix} \rho\left(\tilde{A}\right) & 0 \\ 0 & \overline{\rho}\left(\tilde{A}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & W \\ \overline{W} & 0 \end{pmatrix}\left(\rho_D\left(\tilde{A}\right)\right)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \rho\left(\tilde{A}\right)W \\ \overline{\rho}\left(\tilde{A}\right)\overline{W} & 0 \end{pmatrix}\left(\rho_D\left(\tilde{A}\right)\right)^{-1} \\
\text{(Intertwining-Relation)}\qquad &= \begin{pmatrix} 0 & W\overline{\rho}\left(\tilde{A}\right) \\ \overline{W}\rho\left(\tilde{A}\right) & 0 \end{pmatrix}\left(\rho_D\left(\tilde{A}\right)\right)^{-1} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & W \\ \overline{W} & 0 \end{pmatrix}}_{=D}\underbrace{\begin{pmatrix} \rho\left(\tilde{A}\right) & 0 \\ 0 & \overline{\rho}\left(\tilde{A}\right) \end{pmatrix}}_{=\rho_D\left(\tilde{A}\right)}\left(\rho_D\left(\tilde{A}\right)\right)^{-1} \\
&= D\underbrace{\rho_D\left(\tilde{A}\right)\left(\rho_D\left(\tilde{A}\right)\right)^{-1}}_{=\mathbb{1}} \\
&= D
\end{aligned}$$

Damit ist die Poincaré-Invarianz der Dirac-Gleichung bewiesen!

Wir sehen also sofort, daß $\rho_D\left(\tilde{A}\right)$ aus Lösungen der Dirac-Gleichung wieder Lösungen macht, denn sei

$$\begin{aligned}
(D+m)\,\Psi(\boldsymbol{x}) &= 0 \\
\Rightarrow\quad (D+m)\,\rho_D\left(\tilde{A}\right)\Psi(\boldsymbol{x}) &= D\rho_D\left(\tilde{A}\right)\Psi(\boldsymbol{x}) + \rho_D\left(\tilde{A}\right)m\Psi(\boldsymbol{x}) \\
\left(\text{da } D\rho_D\left(\tilde{A}\right) = \rho_D\left(\tilde{A}\right)D \text{ (s. (8.6))}\right)\qquad &= \rho_D\left(\tilde{A}\right)\underbrace{(D+m)\,\Psi(\boldsymbol{x})}_{=0\text{ n. Vor.}} = 0
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, daß für eine Lösung $\Psi_D(\boldsymbol{x})$ der Dirac-Gleichung die Komponenten $\Psi, \overline{\Psi}$ auch die Klein-Gordon-Gleichung erfüllen:

Sei also

$$
\begin{array}{rrcl}
 & (D+m)\,\Psi_D(\boldsymbol{x}) & = & 0 \\
\Rightarrow & (D-m)\,(D+m)\,\Psi_D(\boldsymbol{x}) & = & 0 \\
\Rightarrow & (D^2-m^2)\,\Psi_D(\boldsymbol{x}) & = & 0 \\
 & D^2 \overset{\text{(ii)}}{=} \begin{pmatrix} 0 & W \\ \overline{W} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & W \\ \overline{W} & 0 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} W\overline{W} & 0 \\ 0 & \overline{W}W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Box & 0 \\ 0 & -\Box \end{pmatrix} \\
\Rightarrow & \begin{pmatrix} -\Box - m^2 & 0 \\ 0 & -\Box - m^2 \end{pmatrix}\Psi_D(\boldsymbol{x}) & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\text{bzw.} & \begin{pmatrix} \Box + m^2 & 0 \\ 0 & \Box + m^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Psi(\boldsymbol{x}) \\ \overline{\Psi}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Also erfüllen die Weyl-Spinoren $\Psi, \overline{\Psi}$ die Klein-Gordon-Gleichung mit Masse $m$.

Daher können wir die Dirac-Spinoren als Wellenfunktionen von Teilchen mit Masse $m$ und Spin $1/2$ interpretieren.

Wir werden nun die $\gamma$-Matrizen einführen und anschließend die Form der Dirac-Gleichung, wie sie in der Literatur zu finden ist, abzuleiten.

Es ist:

$$
D = \begin{pmatrix} 0 & W \\ \overline{W} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & +\sigma_\mu \partial^\mu \\ -\overline{\sigma}_\mu \partial^\mu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ -\overline{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix} \partial^\mu
$$

$$
\left( \text{eigentlich } \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ -\overline{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix} \otimes \partial^\mu \right)
$$

Wir definieren nun $\gamma$-Matrizen:

$$
(-\mathrm{i})\,\gamma^\mu := \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ -\overline{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}; \qquad \text{bzw.: } \gamma^\mu := \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\sigma^\mu \\ -\mathrm{i}\overline{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}
$$

explizit:

$$
\gamma^0 := \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\mathbb{1}_2 \\ -\mathrm{i}\mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^k := \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\sigma^k \\ \mathrm{i}\sigma^k & 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathbb{1}_2 : 2{\times}2\text{-Einheitsmatrix}
$$

dabei ist der $(-\mathrm{i})$-Faktor nur eingeführt, um der Dirac-Gleichung die bekannte Form zu geben.

Mit dieser Definition lautet die Dirac-Gleichung

$$
[-\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu + m]\,\Psi_D(\boldsymbol{x}) = 0
$$

oder

$$
[\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m]\,\Psi_D(\boldsymbol{x}) = 0
$$

Vergleicht man diese Formeln mit der Literatur, so wird man feststellen, daß die äußere Form der Gleichung mit der Literatur übereinstimmt. Aber wenn man die $\gamma$-Matrizen gemäß der obigen Definition ausrechnet, so findet man Unterschiede!

---

(ii) **Bemerkung: Natürlich ist jeder Eintrag in diesen und den folgenden Matrizen immer als $2\times 2$-Matrix zu lesen. Aus diesem Grund sind skalare Größen immer mit $\mathbf{I}_2$ zu multiplizieren. Beispielsweise ist hier: $m^2 = m^2\mathbf{I}_2$, $\Box = \Box\mathbf{I}_2$.**

Der Grund liegt darin, daß die Dirac-Gleichung unendlich viele äquivalente Formen besitzt. Denn sei

$$\begin{aligned}
(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\Psi_D(\boldsymbol{x}) &= 0 \\
\Leftrightarrow\quad U(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\underbrace{\mathbb{1}}_{=\overset{-1}{U}\,U}\Psi_D(\boldsymbol{x}) &= 0; \qquad U \in \mathrm{GL}(4,\mathbb{C}) \\
\Leftrightarrow\quad U[\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m]\,\overset{-1}{U}\,(U\Psi_D(\boldsymbol{x})) &= 0 \\
\Leftrightarrow\quad \left[\mathrm{i}U\gamma^\mu\,\overset{-1}{U}\,\partial_\mu - m\right][U\Psi_D(\boldsymbol{x})] &= 0 \\
\Leftrightarrow\quad [\mathrm{i}\gamma'^\mu\partial_\mu - m]\,\Psi'_D(\boldsymbol{x}) &= 0
\end{aligned}$$

Wir haben also durch die Ähnlichkeitstransformation

$$\begin{aligned}
\gamma'^\mu &= U\gamma^\mu\,\overset{-1}{U} \\
\Psi'_D(\boldsymbol{x}) &= U\Psi(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

aus der ursprünglichen Dirac-Gleichung mit ihrer Lösung eine neue Dirac-Gleichung, mit von $\gamma^\mu$ verschiedenen $\gamma'^\mu$(!), gewonnen. Wir werden, von unserer Dirac-Gleichung mit unseren $\gamma^\mu$ ausgehend, durch eine Ähnlichkeitstransformation die überall angegebene Standarddarstellung der $\gamma$-Matrizen gewinnen. Zunächst beweisen wir jedoch einige Eigenschaften der hier definierten $\gamma$-Matrizen und wir werden fordern, daß diese Eigenschaften nicht durch eine Ähnlichkeitstransformation $U$ verändert werden dürfen.

Die $\gamma$-Matrizen haben folgende Eigenschaften:

i) Antivertauschungsrelationen:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}_4; \qquad \mathbb{1}_4: \quad 4\times 4 \text{ Einheitsmatrix}$$

ii) Nicht-Hermitezität (im Gegensatz zu den $\sigma^\mu$)

Es gilt

$$\begin{aligned}
\gamma^{0+} &= \gamma^0 \\
\gamma^{k+} &= -\gamma^k; \qquad k = 1,\ldots,3 \\
\text{und } \gamma^0\gamma^\mu &= \gamma^{\mu+}\gamma^0; \qquad \mu = 0,\ldots,3 \qquad (8.7)
\end{aligned}$$

iii) Transformation der $\gamma$-Matrizen unter Lorentztransformationen.

$$\overset{-1}{S}(\alpha)\,\gamma^\mu S(\alpha) = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu$$

Dabei ist $\Lambda = h(\alpha)$.

<u>Beweis.:</u> zu i)

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu &= \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\sigma^\mu \\ -\mathrm{i}\overline{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\sigma^\nu \\ -\mathrm{i}\overline{\sigma}^\nu & 0 \end{pmatrix}+ \\
&\quad+\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\sigma^\nu \\ -\mathrm{i}\overline{\sigma}^\nu & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\sigma^\mu \\ -\mathrm{i}\overline{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu & 0 \\ 0 & \overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu+\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu+\overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \\
&= 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}_4
\end{aligned}$$

zu ii)

$$\gamma^0=\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\mathbb{1}_2 \\ -\mathrm{i}\mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}\rightsquigarrow\gamma^{0+}=\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}\mathbb{1}_2 \\ +\mathrm{i}\mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\mathbb{1}_2 \\ -\mathrm{i}\mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}=\gamma^0$$

$$\gamma^k=\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\sigma^k \\ \mathrm{i}\sigma^k & 0 \end{pmatrix}\rightsquigarrow\gamma^{k+}=\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}\sigma^k \\ -\mathrm{i}\sigma^k & 0 \end{pmatrix}=-\gamma^k$$

Ferner ist:

$$\gamma^0\gamma^\mu=\left[\gamma^0,\gamma^\mu\right]_+-\gamma^\mu\gamma^0=2g^{0\mu}\mathbb{1}_4-\gamma^\mu\gamma^0$$

$$\Rightarrow\qquad\left\{\begin{matrix} \mu=0 & \gamma^0\gamma^\mu=\gamma^0\gamma^0=\gamma^0\gamma^{0+} \\ \mu=k & \gamma^0\gamma^k=-\gamma^k\gamma^0=\gamma^{k+}\gamma^0 \end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow\qquad\gamma^0\gamma^\mu=\gamma^{\mu+}\gamma^0$$

zu iii)

$$\begin{aligned}
\overset{-1}{S}(\alpha)\gamma^\mu S(\alpha) &= \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \overline{\alpha}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\sigma^\mu \\ -\mathrm{i}\overline{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \overline{\alpha}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\sigma^\mu\overline{\alpha} \\ -\mathrm{i}\overline{\sigma}^\mu\alpha & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}(\alpha)^{-1}\sigma^\mu\overline{\alpha} \\ \overline{\alpha}^{-1}(-\mathrm{i})\overline{\sigma}^\mu\alpha & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}(\alpha)^{-1}\sigma^\mu\left((\alpha)^{-1}\right)^+ \\ \overline{\left((\alpha)^{-1}\right)}(-\mathrm{i})\overline{\sigma}^\mu\left(\overline{(\alpha)^{-1}}\right)^+ & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\Lambda^\mu{}_\nu\sigma^\nu \\ -\mathrm{i}\Lambda^\mu{}_\nu\overline{\sigma}^\nu & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \Lambda^{\mu}{}_{\nu} \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\sigma^{\nu} \\ -\mathrm{i}\overline{\sigma}^{\nu} & 0 \end{pmatrix} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu}$$

Dabei wurde benutzt, daß folgendes gilt:

$$\begin{aligned} (\alpha)^{-1}\,\sigma^{\mu}\left(\overset{-1}{\alpha}\right)^{+} &= \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\sigma^{\nu} \\ \overline{\overset{-1}{\alpha}}\,\overline{\sigma}^{\mu}\,\overline{\left(\overset{-1}{\alpha}\right)}^{+} &= \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\overline{\sigma}^{\nu} \end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned} \alpha\sigma^{\mu}\alpha^{+} &= \alpha g^{\mu\kappa}\sigma_{\kappa}\alpha^{+} \\ &= g^{\mu\kappa}\alpha\sigma_{\kappa}\alpha^{+} \\ &= g^{\mu\kappa}\Lambda^{\gamma}{}_{\kappa}\sigma_{\gamma} \end{aligned}$$

Nun ist aber:

$$\begin{array}{lrcl} & g^{\mu\nu}\Lambda^{\rho}{}_{\mu}\Lambda^{\sigma}{}_{\nu} &=& g^{\rho\sigma} \\ \text{Umstellen:} & g^{\mu\nu}\Lambda^{\sigma}{}_{\nu}\Lambda^{\rho}{}_{\mu} &=& g^{\rho\sigma} \\ \rightsquigarrow & g^{\mu\nu}\Lambda^{\sigma}{}_{\nu}\Lambda^{\rho}{}_{\mu}(\Lambda^{-1})^{\gamma}{}_{\rho} &=& g^{\rho\sigma}(\Lambda^{-1})^{\gamma}{}_{\rho} \\ \text{Umstellen:} & g^{\mu\nu}\Lambda^{\sigma}{}_{\nu}\underbrace{\left(\overset{-1}{\Lambda}\right)^{\gamma}{}_{\rho}\Lambda^{\rho}{}_{\mu}}_{\delta^{\gamma}{}_{\mu}} &=& g^{\rho\sigma}(\Lambda^{-1})^{\gamma}{}_{\rho} \\ \rightsquigarrow & g^{\mu\nu}\delta^{\gamma}{}_{\mu}\Lambda^{\sigma}{}_{\nu} &=& g^{\rho\sigma}(\Lambda^{-1})^{\gamma}{}_{\rho} \\ \rightsquigarrow & g^{\gamma\nu}\Lambda^{\sigma}{}_{\nu} &=& g^{\rho\sigma}(\Lambda^{-1})^{\gamma}{}_{\rho} \end{array}$$

Durch entsprechendes Ersetzen der Indizes:

$$g^{\mu\kappa}\Lambda^{\gamma}{}_{\kappa} = g^{\nu\gamma}\left(\overset{-1}{\Lambda}\right)^{\mu}{}_{\nu}$$

und damit folgt:

$$\alpha\sigma^{\mu}\alpha^{+} = g^{\nu\gamma}\left(\overset{-1}{\Lambda}\right)^{\mu}{}_{\nu}\sigma_{0} = \left(\overset{-1}{\Lambda}\right)^{\mu}{}_{\nu}\sigma^{\nu}$$

also ist:

$$\alpha\sigma^{\mu}\alpha^{+} = \left(\overset{-1}{\Lambda}\right)^{\mu}{}_{\nu}\sigma^{\nu}$$

Durch Übergang zu $\alpha^{-1}$:

$$\overset{-1}{\alpha}\,\sigma^{\mu}\,\overset{-1}{\alpha}{}^{+} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\sigma^{\nu}$$

analog zeigt man:

$$\overline{\overset{-1}{\alpha}}\,\overline{\sigma}^{\mu}\left(\overline{\overset{-1}{\alpha}}\right)^{+} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\sigma^{\nu}$$

da sich die $\overline{\sigma}_{\mu}$ bezüglich $\overline{\alpha}, \overline{\alpha}^{+}$ genauso wie die $\sigma_{\mu}$ transformieren.

Aus den Eigenschaften i)–iii) können wir nun einige Bedingungen an die Ähnlichkeitstransformation der $\gamma$-Matrizen stellen, wenn wir fordern, daß i)–iii) auch für alle $\gamma$-Matrizen, die aus Ähnlichkeitstransformationen hervorgehen, gelten.

Die Antivertauschungsrelationen i) bleiben bei jeder Ähnlichkeitstransformation $U \in \mathrm{GL}(4,\mathbb{C})$ erhalten:

Sei $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}_4$ und $\gamma'^\mu = U\gamma^\mu U^{-1}$, $U \in \mathrm{GL}(4,\mathbb{C})$, dann ist:

$$
\begin{aligned}
\gamma'^\mu\gamma'^\nu + \gamma'^\nu\gamma'^\mu &= \left(U\gamma^\mu \overset{-1}{U}\right)\left(U\gamma^\nu \overset{-1}{U}\right) + \left(U\gamma^\nu \overset{-1}{U}\right)\left(U\gamma^\mu \overset{-1}{U}\right) \\
\left(\text{da } \overset{-1}{U}\,U = \mathbb{1}\right) \quad &= U\gamma^\mu\gamma^\nu \overset{-1}{U} + U\gamma^\nu\gamma^\mu \overset{-1}{U} \\
&= U\left(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu\right)\overset{-1}{U} \\
&= U 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}_4 \overset{-1}{U} \\
&= 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}_4 U \overset{-1}{U} \\
&= 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}_4
\end{aligned}
$$

Fordert man die Gültigkeit von ii) für alle $\gamma$-Matrizen, dann muß gelten:

$$\gamma^{0+} = \gamma^0; \quad \gamma^{k+} = -\gamma^k \rightsquigarrow \gamma'^{0+} = \gamma'^0; \quad \gamma'^{k+} = -\gamma'^k$$

mit

$$\gamma'^\mu = U\gamma^\mu \overset{-1}{U}$$

Dann folgt:

$$
\begin{aligned}
& & \gamma'^{0+} &= \gamma'^0 \\
&\Rightarrow & \left(U\gamma^0U^{-1}\right)^+ &= U\gamma^0U^{-1} \\
&\Rightarrow & \left(U^{-1}\right)^+\gamma^{0+}U^+ &= U\gamma^0U^{-1} \\
&\Rightarrow & \left(U^{-1}\right)^+\gamma^{0}U^+ &= U\gamma^0U^{-1} \\
&\Rightarrow & U^{-1}\left(U^{-1}\right)^+\gamma^{0}U^+U &= \gamma^0 \\
&\Rightarrow & U^+ &= U^{-1}
\end{aligned}
$$

also muß $U$ unitär sein.

Wenn $U$ unitär ist, gilt auch:

$$\gamma'^{k+} \overset{\left[\overset{-1}{U}=U^+\right]}{=} \left(U\gamma^kU^+\right)^+ = U\gamma^{k+}U^+ \overset{\left[\gamma^{k+}=-\gamma^k\right]}{=} -U\gamma^kU^+ = -\gamma'^k$$

Auch die Transformationseigenschaft von $\gamma^\mu$ unter $S$ bleibt erhalten; beachte jedoch, daß mit den $\gamma$-Matrizen auch $S(\alpha)$ transformiert wird!

$$\begin{aligned}
\overset{-1}{S'}(\Lambda)\,\gamma'^\mu S'(\Lambda) &= \left(USU^+\right)^{-1}\left(U\gamma^\mu U^+\right)\left(USU^+\right) \\
&= \overset{-1}{U^+}\, S\, \underbrace{\overset{-1}{U}\, U}_{=\mathbb{1}}\gamma^\mu \underbrace{U^+U}_{=\mathbb{1}} SU^+ \\
&= US\gamma^\mu SU^+ = U\Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu U^+ \\
&= \Lambda^\mu{}_\nu U\gamma^\nu U^+ = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma'^\nu
\end{aligned}$$

Wir haben gesehen, daß die Eigenschaften i)–iii) für alle $\gamma$-Matrizen erhalten bleiben, wenn die $\gamma$-Matrizen durch unitäre Transformationen ineinander überführt werden.

Nun werden wir den Übergang von unserer bisherigen Darstellung der $\gamma$-Matrizen zu der in der Literatur als Standarddarstellung angegebenen Darstellung der $\gamma$-Matrizen vornehmen.

Wir hatten bisher:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\mathbb{1}_2 \\ -\mathrm{i}\mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\sigma^k \\ \mathrm{i}\sigma^k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}\sigma_k \\ -\mathrm{i}\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

($\sigma_k$: gewöhnliche Pauli-Matrizen.)

In der Standarddarstellung haben $\gamma^0$ und $\gamma^k$ die Gestalt:

$$\gamma^0_{St} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}; \qquad \gamma^k_{St} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

Behauptung.: Transformiert man nun unsere obigen $\gamma$-Matrizen gemäß

$$\gamma'^\mu = U\gamma^\mu U^+$$

mit

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad U^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

(Beachte, daß $U$ eine $4\times 4$-Matrix ist, man muß also $1 = \mathbb{1}_2$; $\mathrm{i} = \mathrm{i}\mathbb{1}_2$ etc. lesen.) so ergibt sich die Standarddarstellung: $\gamma'^\mu = \gamma^\mu_{St}$

Beweis.:

$$\begin{aligned}
U\gamma^0 U^+ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \gamma^0_{St} \\
U\gamma^k U^+ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\sigma^k \\ \mathrm{i}\sigma^k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix} = \gamma^k_{St}
\end{aligned}$$

Damit haben wir die Dirac-Gleichung in ihrer üblichen Gestalt

$$\boxed{\left[\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m\right] \Psi_D\left(\boldsymbol{x}\right) = 0}$$

mit den üblichen Standardmatrizen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

gefunden.

Wir haben ferner gesehen, daß sich die $\gamma$-Matrizen wie ein Lorentz-4-Vektor unter $\rho_S$ transformieren

$$\boxed{\left(S\left(\alpha\right)\right)^{-1} \gamma^\mu S\left(\alpha\right) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu}$$

und ein Spinor transformiert sich wie folgt

$$\boxed{{\Psi_D}'\left(\boldsymbol{x}\right) = \left(S\left(\alpha\right) \Psi_D\left(\left(\Lambda\left(\alpha\right)\right)^{-1}\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\right)\right)\right)}$$

mit $S\left(\alpha\right) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$

Wir haben bisher noch kein Skalarprodukt für Spinoren erklärt. Dies werden wir nun nachholen. Dazu konstruieren wir wieder einen Strom, der der Kontinuitätsgleichung genügt (falls $\Psi_D\left(\boldsymbol{x}\right)$ die Dirac-Gleichung löst), und definieren die Norm von $\Psi_D\left(\boldsymbol{x}\right)$ über die 0te-Komponente des 4-Stromes.

Sei

$$j^\mu\left(\boldsymbol{x}; \Psi_D\right) := \left\langle \Psi_D\left(\boldsymbol{x}\right), \gamma^0\gamma^\mu \Psi_D\left(\boldsymbol{x}\right)\right\rangle_{\mathbb{C}^4}$$

dabei ist: $\Psi_{D_1}, \Psi_{D_2} : \quad \mathbb{M} \to \mathbb{C}^4$ $\qquad \Psi_{D_1}\left(\boldsymbol{x}\right) = \begin{pmatrix} \Psi^1_{D_1}\left(\boldsymbol{x}\right) \\ \Psi^2_{D_1}\left(\boldsymbol{x}\right) \\ \Psi^3_{D_1}\left(\boldsymbol{x}\right) \\ \Psi^4_{D_1}\left(\boldsymbol{x}\right) \end{pmatrix}$

und $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^4}$ : Skalarprodukt im $\mathbb{C}^4$. also:

$$j^\mu\left(\boldsymbol{x}; \Psi_D\right) = \left\langle \Psi_D\left(\boldsymbol{x}\right), \gamma^0\gamma^\mu \Psi_D\left(\boldsymbol{x}\right)\right\rangle_{\mathbb{C}^4} = \sum_{i=1}^{4} \Psi^{*i}_D\left(\boldsymbol{x}\right) \left(\gamma^0\gamma^\mu\right)_{ij} \Psi^i_D\left(\boldsymbol{x}\right)$$

Wenn nun $\Psi_D\left(\boldsymbol{x}\right)$ die Dirac-Gleichung löst, so gilt die Kontinuitätsgleichung für $j^\mu\left(\boldsymbol{x}; \Psi_D\right)$:

$$\partial_\mu j^\mu\left(\boldsymbol{x}; \Psi_D\right) = 0$$

<u>Beweis.:</u>

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \left\langle \Psi_D\left(\boldsymbol{x}\right), \gamma^0\gamma^\mu \Psi_D\left(\boldsymbol{x}\right)\right\rangle_{\mathbb{C}^4} &= \left\langle \partial_\mu \Psi_D\left(\boldsymbol{x}\right), \gamma^0\gamma^\mu \Psi_D\left(\boldsymbol{x}\right)\right\rangle_{\mathbb{C}^4} + \\
&\quad + \left\langle \Psi_D\left(\boldsymbol{x}\right), \gamma^0\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_D\left(\boldsymbol{x}\right)\right\rangle_{\mathbb{C}^4} \\
(\text{da } \gamma^{0+} = \gamma^0) &= \left\langle \gamma^{\mu+}\gamma^0 \partial_\mu \Psi_D\left(\boldsymbol{x}\right), \Psi_D\left(\boldsymbol{x}\right)\right\rangle_{\mathbb{C}^4} + \\
&\quad + \left\langle \Psi_D\left(\boldsymbol{x}\right), \gamma^0\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_D\left(\boldsymbol{x}\right)\right\rangle_{\mathbb{C}^4} \\
(\text{s. (8.7) auf Seite 60}) &= \left\langle \gamma^0\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_D\left(\boldsymbol{x}\right), \Psi_D\left(\boldsymbol{x}\right)\right\rangle_{\mathbb{C}^4} + \\
&\quad + \left\langle \Psi_D\left(\boldsymbol{x}\right), \gamma^0\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_D\left(\boldsymbol{x}\right)\right\rangle_{\mathbb{C}^4}
\end{aligned}$$

$$\text{mit } [\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m]\, \Psi_D(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_D(\boldsymbol{x}) = -\mathrm{i}m\Psi_D(\boldsymbol{x})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \partial_\mu j^\mu(\boldsymbol{x};\Psi_D) &= \left\langle -\mathrm{i}\gamma^0 m\Psi_D(\boldsymbol{x}), \Psi_D(\boldsymbol{x})\right\rangle_{\mathbb{C}^4} + \left\langle \Psi_D(\boldsymbol{x}), \gamma^0(-\mathrm{i}m)\,\Psi_D(\boldsymbol{x})\right\rangle_{\mathbb{C}^4} \\ &= \mathrm{i}m\left\langle \Psi_D(\boldsymbol{x}), \gamma^0\Psi_D(\boldsymbol{x})\right\rangle_{\mathbb{C}^4} - \mathrm{i}m\left\langle \Psi_D(\boldsymbol{x}), \gamma^0\Psi_D(\boldsymbol{x})\right\rangle_{\mathbb{C}^4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Wir definieren nun das Skalarprodukt von Spinoren

Definition.: Skalarprodukt

$$\langle \Psi_{D_1}, \Psi_{D_2}\rangle := \int \mathrm{d}^3x\, j^0(\boldsymbol{x};\Psi_{D_1},\Psi_{D_2}) = \int \mathrm{d}^3x\, \left\langle \Psi_{D_1}, \gamma^0\gamma^0\Psi_{D_2}\right\rangle_{\mathbb{C}^4}$$

Aus $\gamma^0\gamma^0 = \mathbb{1}_4$ folgt

$$\langle \Psi_{D_1}, \Psi_{D_2}\rangle = \int \mathrm{d}^3x\, \langle \Psi_{D_1}, \Psi_{D_2}\rangle_{\mathbb{C}^4}$$

Wie wir früher bereits gezeigt haben, ist ein in obiger Weise konstruiertes Skalarprodukt poincaréinvariant, man kann das natürlich noch einmal explizit nachrechnen, wie wir dies im Fall der Klein-Gordon-Gleichung getan haben.

Nun geht man analog zur Behandlung der Klein-Gordon-Gleichung vor: zunächst löst man die freie Dirac-Gleichung und klassifiziert die Lösungen.

Eine solche Klassifikation führt dann wieder auf (poincaré-)invariante Unterräume, so daß damit auch die irreduzible Darstellung für Teilchen mit Masse $m$ und Spin 1/2 (z.B. $e^\pm,\ p,\ n,\ u$) gefunden ist.

Abschließend wollen wir anmerken, daß hier nur die freie Klein-Gordon- und die freie Dirac-Gleichung behandelt wurden. Um Wechselwirkungen, die beispielsweise durch ein 4-Potential verursacht werden, einzubauen, bedient man sich wieder der minimalen Kopplung. Dazu schreibt man die Klein-Gordon- und die Dirac-Gleichung:

$$\begin{aligned} \left(\Box + m^2\right)\phi(\boldsymbol{x}) &= \left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\phi(\boldsymbol{x}) = \left((+\mathrm{i}\partial_\mu)(+\mathrm{i}\partial^\mu) - m^2\right)\phi(\boldsymbol{x}) = 0 \\ (\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\Psi_D(\boldsymbol{x}) &= \left(\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial_\mu) - m\right)\Psi_D(\boldsymbol{x}) = 0 \end{aligned}$$

Faßt man nun $\mathrm{i}\partial^\mu = \left(\mathrm{i}\partial_t, -\mathrm{i}\vec{\nabla}\right)$ als 4-Impulsoperator $\hat{p}^\mu := \mathrm{i}\partial^\mu$ auf, so hat man:

$$\begin{aligned} \text{Klein-Gordon:} \quad \left(\hat{p}^\mu\hat{p} - \mu + m^2\right)\phi(\boldsymbol{x}) &= 0 \\ \text{Dirac:} \quad (\gamma^\mu\hat{p}_\mu - m)\,\Psi_D(\boldsymbol{x}) &= 0 \end{aligned}$$

Die kanonische Erweiterung der minimalen Kopplung ist:

$$\hat{p}^\mu \;\rightarrow\; \hat{p}^\mu - \frac{q}{c}A^\mu$$

Also ist:

Klein-Gordon-Gleichung mit Wechselwirkung:

$$\left(\left(\hat{p}^{\mu}-\frac{q}{c}A^{\mu}\right)\left(\hat{p}_{\mu}-\frac{q}{c}A_{\mu}\right)-m^{2}\right)\phi\left(\boldsymbol{x}\right)=0$$

Dirac-Gleichung mit Wechselwirkung:

$$\left(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\hat{p}_{\mu}-\frac{q}{c}\gamma^{\mu}A_{\mu}-m\right)\Psi_{D}\left(\boldsymbol{x}\right)=0$$

Die Lösungen der Dirac-Gleichung (sowohl frei, als auch mit Wechselwirkung) findet man in der Standardliteratur, z.B. [5], [10], [2], [3] und [4].

# Literaturverzeichnis


[1] F. Constantinescu. *Distributionen und ihre Anwendung in der Physik.* Teubner, 1974.

[2] James. D. Bjorken; Sidney D. Drell. *Relativistische Quantenmechanik.* No. 98 in B-I-Hochschultaschenbücher. B-I-Wissenschaftsverlag, Mannheim — Wien — Zürich, 1966.

[3] James. D. Bjorken; Sidney D. Drell. *Relativistische Quantenfeldtheorie.* No. 101 in B-I-Hochschultaschenbücher. B-I-Wissenschaftsverlag, Mannheim — Wien — Zürich, 1967.

[4] F. Halzen; A. D. Martin. *Quarks and Leptons.* J. Wiley + Sons, 1984. (Dieses Buch behandelt Teilchenphysik ohne detailiert auf die Feldtheorie einzugehen).

[5] Lewis H. Ryder. *Quantum field theory.* Cambridge University Press, 1986 (Paperback); 1985 (Hardcover).

[6] D. Schütte. "*Darstellungstheorie der Drehgruppe.*". Skriptum zur Vorlesung „Quantentheorie I", Institut für theoretische Kernphysik, Universität Bonn, 1995. Zusammengestellt von J. Nitschkowski.

[7] D. Schütte. "*Darstellungstheorie der Drehgruppe.*". Skriptum zur Vorlesung „Quantentheorie I", Institut für theoretische Kernphysik, Universität Bonn, 1995. Zusammengestellt von J. Nitschkowski.

[8] D. Schütte. "*Darstellungstheorie der Drehgruppe.*". Skriptum zur Vorlesung „Quantentheorie I", Institut für theoretische Kernphysik, Universität Bonn, 1995. Zusammengestellt von J. Nitschkowski.

[9] Roman U. Sexl; Helmuth K. Urbantke. *Relativität, Gruppen, Teilchen.* Springer-Verlag, Wien — New York, 1976. (Dieses Buch enthält auch Kapitel zu Darstellungstheorie [Kap. 6ff.]).

[10] J. C. Itzykson; B. Zuber. *Quantum field theory.* Mc-Graw-Hill, 1990.

# Index

**Fette** Seitenzahlen bezeichnen die Definition des entsprechenden Begriffes. Kleine Seitenzahlen verweisen auf Bilder.