

# Vorbereitung zur Theoretischen Physik



## Einführungskurs für Erstsemester

Prof. H. Müller-Krumbhaar, Prof. W. Selke (Aachen)  
sowie Prof. W. Zimmermann (Saarbrücken)

Dieser Vorkurs soll den Übergang von der Schule zur Universität erleichtern und Ihnen dabei helfen, eine Reihe von praktischen Rechenmethoden zu wiederholen und zum Schulwissen hinzuzulernen. Die strenge mathematische Begründung muss in Mathematikvorlesungen folgen.

Aufbauend auf wenigen Vorkenntnissen werden möglichst anschaulich mathematische Methoden vorgestellt, die sich in der Ausbildung von Naturwissenschaftlern als besonders nützlich erwiesen haben. Die Elektrodynamik als Grundlage der Elektrotechnik und die Grundvorlesung in Quantenphysik (Grundlage aller Informationstechnologie) beschäftigt sich beispielsweise fast ausschliesslich mit linearen mathematischen Methoden. Eine zentrale Rolle spielt hierbei die Diagonalisierung. Entsprechend werden hier Eigenwertprobleme in einigem Detail behandelt. Dabei wird insbesondere der Zusammenhang zwischen Eigenfunktionen und Eigenvektoren herausgestellt.

Viele Probleme lassen sich praktischer in Koordinaten der Kugel- oder Zylindergeometrie darstellen. Koordinatensysteme werden daher im Zusammenhang mit Vektoren, mit dem Nabla-Kalkül und dem Laplace-Operator besprochen.

An verschiedenen Stellen wird von der Diskretisierung von Differentialgleichungen Gebrauch gemacht. Einerseits stellen sich dadurch Operatoren anschaulich als Matrizen dar, andererseits werden damit Wege zur computer-gestützten Behandlung solcher Systeme aufgezeigt.

Die Darstellungen sind in keiner Weise vollständig. Ziel dieser Vorlesung ist es dagegen, möglichst schnell einen Überblick über die verschiedenen Konzepte zur praktischen Lösung typischer mathematisch-physikalischer Probleme zu vermitteln. Falls daher mit den hier vorgestellten Werkzeugen ein Problem gelöst zu sein scheint, sollte unbedingt sehr sorgfältig überprüft werden, ob wirklich alle geforderten Bedingungen erfüllt sind.

Die Vorlesung muss unbedingt durch Übungen unterstützt werden. Der Kurs umfasst ca. 10 Tage zu je 120 Minuten Vorlesung, sowie nochmals bis je ca. 150 Minuten Übungen. Bewährt haben sich hierfür Übungsaufgaben aus mathematischen Repetitorien für Ingenieure. Als zweckmässig erwies es sich, gelegentlich einfach erst einmal nur die Vorlesung in der Übung nachrechnen zu lassen. Ferner werden die Übungsaufgaben möglichst "gradlinig" gestellt, indem man das gelernte Prinzip einfach an einem Beispiel nachrechnet bzw. auf ein einfaches Beispiel anwendet. Die Übungsaufgaben sollten also bewusst **keine** Denksportaufgaben sein, sondern erst mal die Standardvorgehensweise einüben! - Frau Luise Snyders danken wir herzlich für das Schreiben der Formeln. Herr Robert Spatschek hat das Kapitel über Variationsrechnung beigetragen.

-

Nach dem ersten Semester kann man den Kurs bei Kapitel 3 des nachfolgenden Manuskripts beginnen lassen. Schlagwortartig sind auf der folgenden Seite unter *Allgemeine*

*mathematische Grundlagen* und *Lineare Methoden* wesentliche Inhalte des Kurses zusammengefasst, die im Inhaltsverzeichnis dann weiter spezifiziert werden. (P.S. Fuer Hinweise auf Fehler im Manuskript sind die Autoren dankbar .../vorles15.tex/).

Adresse:

Prof. H. Müller-Krumbhaar  
Institut für Festkörperforschung  
Forschungszentrum Jülich  
D-52415 JÜLICH

Tel: 02461-613428

Email: [h.mueller-krumbhaar@fz-juelich.de](mailto:h.mueller-krumbhaar@fz-juelich.de)

## Allgemeine mathematische Grundlagen (1. Woche):

- Geometrische Reihe, e-Funktion, Logarithmus, Fakultät, Stirling-Formel
- Komplexe Zahlen (allg. Eigenschaften, e-Funktion, log, trigonometrische Funktionen)
- Ableitungen und unbestimmte Integrale (Potenzen, e-Funktion, log, Wurzel, rationale Funktionen)
- Taylorentwicklung
- Bestimmte Integrale (Potenzen, e-Funktion, Gauss-Integrale, quadratische Ergänzung, Dirac/Delta-Funktion, Gamma-Funktion, Exponential-Integral)
- Koordinatensysteme (kartesisch, Zylinder, Kugel)
- Vektoren und Matrizen (versch. Darstellungen, Produkte von Vektoren, Einheitsvektoren, Normal- und Tangentialvektoren)
- Nabla-Operator, Gradient, Divergenz, Rotation, Laplace-Operator
- Linienintegrale, Oberflächen und Volumenintegrale; Gauss und Stokes-Satz; Kurven- und Flächeneigenschaften

## Lineare Methoden (2. Woche):

- Hauptachsentransformation; Drehung in der Ebene
- Vier Differentialgleichungen (lin. Diffgl. 1. Ord.; Allg. Diffgl. 2.Ord.(aus Variationsprinzip); part. lin. Diffgl.  $f(x,t)$ ; Systeme gew. lin. Diffgl.)
- Gedämpfter harmonischer Oszillator; Eigenwerte u.Eigenvektoren
- Matrizen-Rechnung; Defekte Matrizen, Hauptwerte
- Diagonalisierung: Bedeutung der Diagonalisierung bei diskretisierten Differentialgleichungen (=Differenzgleichungen)
- Partielle lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ( $e^{ikx}e^{i\omega t}$ ); Fourier-Transformation; Identifikation von Eigenfunktion und Eigenvektor;
- Eindimensionale Diffusionsgleichung bzw. Schrödingergleichung
- Residuensatz: Bestimmte Integrale im Komplexen
- Wahrscheinlichkeit; Mittelwert, Varianz, Random Walk
- Variationsrechnung

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Erste Wiederholungsschritte zu Funktionen und Ableitungen</b>	<b>9</b>
1.1	Funktionen . . . . .	9
1.2	Beispiel für eine Funktion $f(x, y)$ . . . . .	12
1.3	Umkehrfunktionen . . . . .	12
1.4	Gewöhnliche Ableitungen . . . . .	13
1.5	Höhere Ableitungen . . . . .	17
1.6	Partielle Ableitungen . . . . .	17
1.7	Totales Differential . . . . .	19
1.8	Tabelle einiger wichtiger Ableitungen . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Vektoren I - in der Ebene und Polarkoordinaten</b>	<b>22</b>
2.1	Koordinatendarstellung von Vektoren . . . . .	22
2.1.1	Länge und Norm eines Vektors . . . . .	23
2.1.2	Elementare Rechenregeln für Vektoren . . . . .	24
2.2	Parameterdarstellung von Geraden . . . . .	24
2.3	Schnitt zweier Geraden und lineares Gleichungssystem . . . . .	25
2.4	Polarkoordinaten . . . . .	27
2.5	Skalarprodukt . . . . .	28
2.6	Vektorprodukt im $\mathcal{R}^3$ . . . . .	28
<b>3</b>	<b>e-Funktion, Reihen, erste Differentialgleichung</b>	<b>30</b>
3.1	Folgen und Reihen . . . . .	30
3.1.1	Arithmetische Reihen . . . . .	30
3.1.2	Geometrische Reihe . . . . .	31
3.2	Die e-Funktion (= Exponentialfunktion) . . . . .	32
3.3	Differentialgleichung und e-Funktion . . . . .	37
3.4	Einige Rechenregeln für die e-Funktion . . . . .	38
3.5	Der natürliche Logarithmus . . . . .	38
3.6	Anhang: Der Binomische Lehrsatz . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Komplexe Zahlen und weitere elementare Funktionen</b>	<b>42</b>
4.1	Wo treten komplexe Zahlen auf? . . . . .	42
4.2	Die vier Grundrechnungsarten mit komplexen Zahlen . . . . .	44
4.2.1	Addition und Subtraktion . . . . .	44
4.2.2	Multiplikation . . . . .	45
4.2.3	Division . . . . .	45
4.3	Komplex konjugierte Zahl . . . . .	46
4.4	Betrag und Argument komplexer Zahlen . . . . .	46
4.5	Komplexe Zahlen und die e-Funktion . . . . .	47
4.6	Die Polardarstellung komplexer Zahlen . . . . .	48
4.7	Multiplikation und Division in Polarform . . . . .	49
4.8	de Moivre's Theorem . . . . .	49

4.9	Trigonometrische Funktionen . . . . .	49
4.10	Die Suche nach der $n$ -ten Wurzel von "1" . . . . .	54
4.11	Logarithmus . . . . .	55
4.12	Hyperbolische Funktionen . . . . .	56
4.13	Wo kommen hyperbolische Funktionen vor? . . . . .	58
4.14	Hyperbolische Umkehrfunktionen – Areafunktionen . . . . .	60
4.15	Weitere Ableitungsregeln und Ableitungen . . . . .	60
4.16	Anwendungsbeispiel für den $\tanh(x)$ . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Approximation von Funktionen</b>	<b>63</b>
5.1	Taylor-Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen . . . . .	63
5.2	Newton-Verfahren . . . . .	64
<b>6</b>	<b>Integral-Rechnung</b>	<b>66</b>
6.1	Das bestimmte Integral . . . . .	66
6.2	Das unbestimmte Integral . . . . .	68
6.3	Tabelle einiger Integrale . . . . .	69
6.4	Integration harmonischer Funktionen . . . . .	70
6.5	Logarithmische Integration . . . . .	71
6.6	Integration durch Substitution . . . . .	71
6.7	Partielle Integration . . . . .	72
6.8	Integration durch Partialbruchzerlegung . . . . .	74
6.9	Mehrfachintegrale . . . . .	74
6.10	Variablentransformation und Jacobi-Determinante . . . . .	76
6.11	Gauß-Integrale vom Typ $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ . . . . .	80
6.12	Quadratische Ergänzung . . . . .	82
6.13	Sattelpunkt-Integration . . . . .	82
6.14	Approximative Lösung bestimmter Integrale . . . . .	83
6.15	Anhang: Gamma-Funktion . . . . .	84
<b>7</b>	<b>Die Diracsche <math>\delta</math>-Funktion</b>	<b>87</b>
7.1	Definition und Eigenschaften . . . . .	87
7.2	Zusammenfassung einiger Eigenschaften der $\delta$ -Funktion: . . . . .	90
<b>8</b>	<b>Koordinatensysteme</b>	<b>91</b>
8.1	Polarkoordinaten in zwei Dimensionen . . . . .	91
8.2	Zylinderkoordinaten . . . . .	91
8.3	Kugelkoordinaten . . . . .	92
<b>9</b>	<b>Vektoranalysis und Integralsätze</b>	<b>94</b>
9.1	Raumkurven und Vektorfelder . . . . .	94
9.2	Vektoroperatoren . . . . .	96
9.2.1	Gradient eines skalaren Feldes . . . . .	96

9.2.2	Divergenz eines Vektorfeldes . . . . .	98
9.2.3	Rotation eines Vektorfeldes . . . . .	99
9.3	Vektorintegration . . . . .	101
9.3.1	Kurvenintegrale . . . . .	101
9.3.2	Flächen- und Oberflächenintegrale . . . . .	102
9.3.3	Integralsätze von Gauß und Stokes . . . . .	103
9.4	Laplace-Operator . . . . .	106
<b>10</b>	<b>Lineare Systeme</b>	<b>107</b>
10.1	Allgemeines . . . . .	107
10.2	Funktion als Vektor in hochdimensionalem Raum . . . . .	107
10.3	Drehung von Vektoren . . . . .	108
10.4	Matrixmultiplikation . . . . .	109
10.5	Transponierte, inverse und orthogonale Matrizen . . . . .	110
<b>11</b>	<b>Eigenwerte und Eigenvektoren von <math>2 \times 2</math> Matrizen</b>	<b>111</b>
11.1	Allgemeines . . . . .	111
11.2	$2 \times 2$ Matrizen . . . . .	113
<b>12</b>	<b>Hauptachsentransformation und Diagonalisierung</b>	<b>115</b>
<b>13</b>	<b>Differentialgleichungen</b>	<b>118</b>
13.1	Gewöhnliche Lineare DGL 1. Ordnung mit Inhomogenität . . . . .	119
13.2	Verallgemeinerung: Systeme linearer DGL . . . . .	120
13.3	Der gedämpfte harmonische Oszillator . . . . .	124
13.3.1	Definition . . . . .	124
13.3.2	4 Parameterbereiche . . . . .	125
13.4	Defective Matrices . . . . .	128
13.5	DGL 2. Ordnung; homogen, ohne Ableitung 1.Ordnung . . . . .	133
13.6	Lineare Partielle DGL mit konstanten Koeffizienten . . . . .	133
<b>14</b>	<b>Diagonalisierung einer Differentialgleichung und Fourier-Transformation</b>	<b>135</b>
<b>15</b>	<b>Eigenwertproblem allgemein</b>	<b>140</b>
<b>16</b>	<b>Fourier-Trafo an der Diffusions- bzw. Schrödinger-Gleichung</b>	<b>143</b>
<b>17</b>	<b>Green'sche Funktion</b>	<b>146</b>
<b>18</b>	<b>Residuensatz: Integrale lösen im Komplexen</b>	<b>148</b>
<b>19</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsrechnung</b>	<b>153</b>

<b>20 Variationsrechnung</b>	<b>156</b>
20.1 Funktionale . . . . .	156
20.2 Funktionalableitungen . . . . .	157
20.3 Anhang . . . . .	166
<b>21 Anhang: Griechisches Alphabet</b>	<b>167</b>
<b>22 Literatur</b>	<b>168</b>

# 1 Erste Wiederholungsschritte zu Funktionen und Ableitungen

## 1.1 Funktionen

Graphen und Funktionsverläufe sind Ihnen bereits aus der Schule bekannt. Die in diesem Abschnitt besprochenen weiteren Beispiele treten häufig in Naturwissenschaft und Technik zur Darstellung quantitativer Zusammenhänge auf. Funktionsverläufe begegnen uns auch tagtäglich in Nachrichten- und Informationssendungen im Fernsehen oder in Zeitungen zur Darstellung empirischer Daten. Z.B werden häufig Ergebnisse von Meinungsumfragen oder die Entwicklung von Börsenkursen als Funktion der Zeit in Graphen dargestellt.

Allerdings ist nicht jeder Funktionsverlauf analytisch durch eine einfache Formel darstellbar. Dies setzt nämlich ein Verständnis der mit der Formel beschriebenen Vorgänge voraus. Nach dem Stand der Dinge verstehen wir die komplizierten Ursachen und Beweggründe der Bevölkerungsentwicklung aber noch nicht und auch nicht die Entwicklung der Börsenkurse. Demzufolge können wir für deren zeitliche Entwicklung immer nur bis zur Gegenwart die Daten aufzeichnen und keine Formel angeben, um damit deren Entwicklungen vorherzusagen.

Hier in diesem Kurs geht es um typische und analytisch darstellbare Gesetzmäßigkeiten, wie sie bei vielen naturwissenschaftlichen und technischen Vorgängen auftreten. Beginnen wir mit besonders einfachen Beispielen. Fährt ein Fahrzeug am Ort  $y_0$  mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  los und behält diese bei, dann befindet es sich zur Zeit  $t$  am Ort

$$y = y_0 + vt. \quad (1)$$

Dieser einfache und lineare (gerade) Funktionsverlauf ist in Abb. 1a) für  $y_0 = 0.5$  und  $v = 1$  (durchgezogene Linie) und für  $y_0 = 0.2$  mit entgegengesetzter Geschwindigkeit  $v = -1$  dargestellt (gestrichelt). Funktionsverläufe mit der Form einer Parabel  $y = x^2$ , wie in Abb. 1b) zu sehen, sind in Wissenschaft und Technik ebenso weit verbreitet.

In Abb. 1c) sind ein linearer (wie in Abb. 1 dargestellt) und ein parabolischer Funktionsverlauf wie folgt überlagert

$$y = b + ax + x^2 \quad (2)$$

und für  $a = 1.5$ ,  $b = 0$  (gestrichelte Linie) und für  $a = -1$ ,  $b = 0$  (durchgezogene Linie) dargestellt.

Daneben treten aber immer wieder Kurvenverläufe auf, welche durch Polynome höheren Grades dargestellt werden können und dies in *ganz* unterschiedlichen Zusammenhängen. Ein wichtiges Beispiel für eine Polynomfunktion ist

$$f_p(x) = -ax^2 + x^4. \quad (3)$$

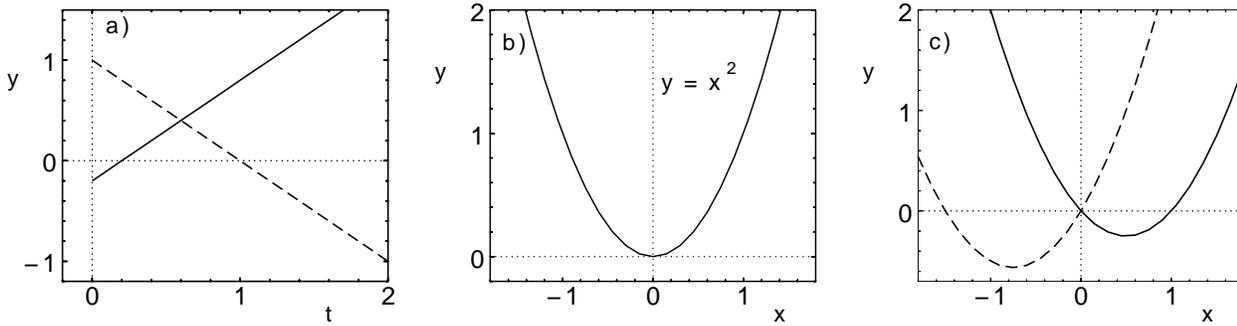


Abbildung 1: *Elementare Funktionen: Im Teil a) sind es zwei Geraden nach Gl.(1) und Parametern wie im Text. In b) ist eine Parabel  $f(x) = x^2$  dargestellt und in c) ist nach Gl. (2) eine Gerade überlagert mit einer Parabel dargestellt und zwar für  $a = -1$  (durchgezogen) und  $a = 1.5$  (gestrichelt).*

Diese einfache Polynomfunktion begegnet Ihnen z.B. während des Studiums in der Mechanik, der Thermodynamik und Statistik und in der Festkörperphysik.

Man stelle sich z.B. vor, der Funktionsverlauf in Abb. (2) entspräche einer Erdmulde in der ein Kügelchen losgelassen wird. Das Kügelchen wird dem niedrigsten Punkt der Kurve zustreben. Dies ist einmal  $x = 0$  für  $a < 0$  und  $x \neq 0$  für  $a > 0$ . Der Wert  $x \neq 0$  wird durch Kurvendiskussion weiter unten noch bestimmt.

In der Thermodynamik der Phasenübergänge ist  $y = f_p(x)$  beispielsweise die thermodynamische Energie eines Materials, das unterhalb einer materialspezifischen Temperatur  $T_c$  magnetisch zu werden vermag. "x" ist dabei die Stärke der Magnetisierung. Das entsprechende Material ändert dabei sein magnetisches Verhalten von einem Paramagneten ( $x=0$ ) für  $T > T_c$  (wo das Material noch keinen magnetischen Dipol besitzt) zu einem Ferromagneten ( $x > 0$  oder  $x < 0$ ) für  $T < T_c$ , wo es dann in diesem Temperaturbereich einen magnetischen Dipol besitzt (Kompassnadel). Bei diesem Beispiel aus der Thermodynamik ist die Größe  $a$  eine lineare Funktion der Temperatur  $T$  wie  $a = \beta(T - T_c)$  und  $x$  entspricht der Magnetisierung, also der magnetischen Dipolstärke. Auch viele thermodynamische Systeme streben wie das beschriebene Kügelchen dem Zustand niedrigster Energie zu, d.h. dem jeweiligen Minimum der Kurve in Abb. 2. Die entsprechende Theorie die zu diesen Kurvenverläufen der thermodynamischen Energie führt, werden sie später im Studium als Ginzburg-Landau Theorie im Rahmen der Thermodynamik kennen lernen. Aber derartige Kurvenverläufe wie in Abb. 2 treten auch bei sogenannten anharmonischen Potentialen schwingender Systeme oder in der Festkörperphysik auf. Die mathematische Struktur der Funktion  $f_p(x)$  ist recht einfach, wohingegen die mögliche Bedeutung in realen Systemen einiges an Kenntnissen erfordert, welche im Laufe eines Physikstudiums erarbeitet werden.

Nicht nur Summen verschiedener Potenzen  $x^n$  einer Variablen  $x$  sind als Funktion von Bedeutung. Manche Funktionen haben die Variable  $x$  im Exponenten, wie z.B. für eine

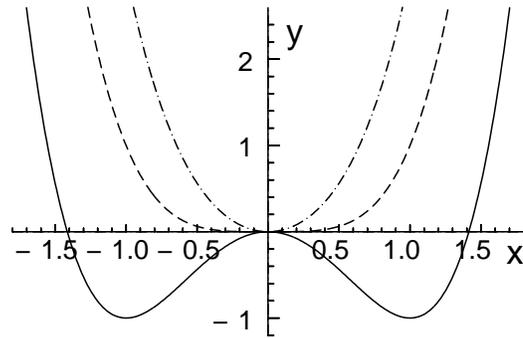


Abbildung 2: Die Polynomfunktion  $f_p(x) = -ax^2 + x^4$  für  $a = -2$  (Strichpunktlinie),  $a = 0$  (gestrichelt) und  $a = 2$  (durchgezogen) .

relle Zahl  $b$  die Funktion  $f(x) = b^x$ . Die berühmteste und zugleich wichtigste Funktion dieser Art ist die  $e$ -Funktion  $e^x$  auch  $e^x = \exp(x)$  geschrieben. Die Zahl  $e$  hat den Wert  $e = 2.7182818\dots$ , welchen wir uns später im Abschnitt 3 mit einer Reihendarstellung noch beschaffen werden. Der Funktionsverlauf von  $e^x$  ist in Abb. 3 dargestellt.

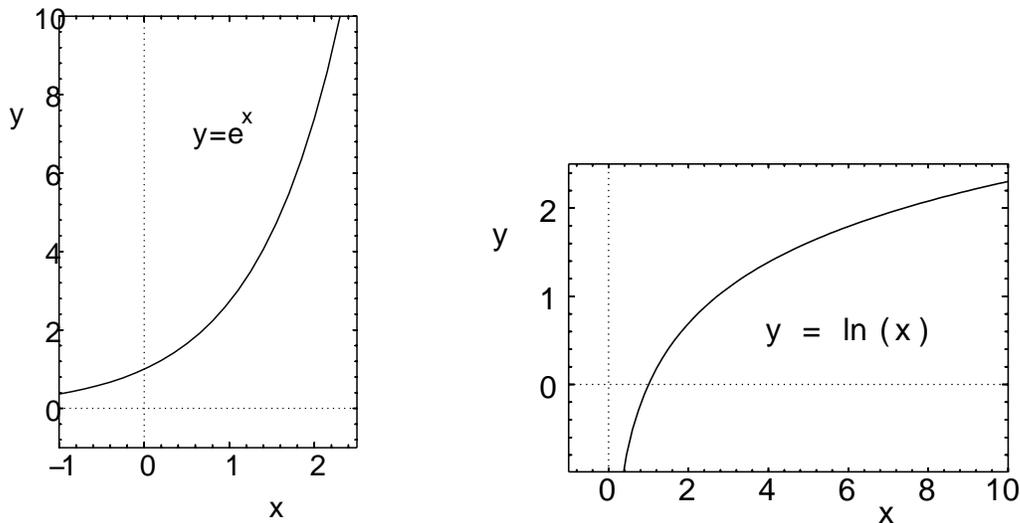


Abbildung 3: Zwei weitere elementare Funktionen. Links ist die  $e$ -Funktion  $e^x = \exp(x)$  dargestellt und rechts ist ihre Umkehrfunktion  $\ln(x)$  gezeigt.

Die  $e$ -Funktion tritt in vielerlei Zusammenhängen auf, wie z.B bei der Zinseszins-Rechnung, bei der Rentenrechnung oder beim Bakterienwachstum. Aber auch bei sehr vielen anderen funktionalen Zusammenhängen tritt die  $e$ -Funktion auf. Wie wir noch in vielen Beispielen sehen werden, ist die  $e$ -Funktion ganz zentral bei sogenannten linearen Systemen (deren Bedeutung später erklärt wird).

Ähnlich universelle Funktionen sind die trigonometrischen Funktionen  $\sin(x)$  und  $\cos(x)$ , welche beide in Abb. 4 dargestellt sind.  $f(t) = A \sin(\omega t)$  beschreibt beispielsweise die kleinen Auslenkungen eines Uhrenpendels als Funktion der Zeit. Beide Funktionen lassen sich durch die  $e$ -Funktion ausdrücken, wie im Abschnitt 4.9 beschrieben.

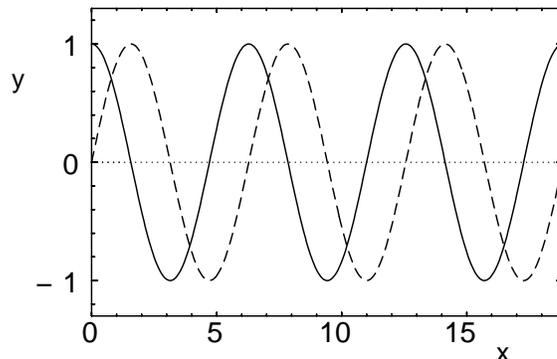


Abbildung 4: Die durchgezogene Kurve ist  $f(x) = \cos(x)$  und die gestrichelte Linie ist  $f(x) = \sin(x)$ . Beide Funktionen sind nur ein wenig gegeneinander verschoben. Genaugenommen gilt  $\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$ , wie wir noch zeigen werden.

Diese trigonometrischen Funktionen begegnen Ihnen nicht nur bei der Beschreibung eines Pendels. Wie die Exponentialfunktion finden wir diese in der Mechanik, Elektrizitätslehre und Elektrodynamik, Quantenphysik etc. Dahinter steckt, dass viele grundlegende Gleichungen, sogenannte Differentialgleichungen, linear sind, welche  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ , oder besser noch  $e^{ix}$ , als Lösungen besitzen.

## 1.2 Beispiel für eine Funktion $f(x, y)$

Neben Funktionen von einer Variablen sind auch Funktionen von mehreren Variablen vorstellbar und von Bedeutung. Die Höhe einer Fläche über einer Ebene, wie z.B. in Abb. 5, ist eine Funktion von zwei Variablen:  $f(x, y)$ . Es sind auch Funktionen vorstellbar, die von allen drei Raumkoordinaten oder von  $N$  Veränderlichen abhängen. Hierzu werden wir noch kommen.

## 1.3 Umkehrfunktionen

Bisher haben wir von Funktion  $y = f(x)$  gesprochen. Oft möchte man aber  $x$  durch die Variable  $y$ , also durch eine Funktion  $x = g(y)$  ausdrücken. Man nennt dann  $g(y)$  die Umkehrfunktion zu  $f(x)$ .

Beispiel 1: Für die Parabel  $y = f(x) = x^2$  ist die Umkehrung einfach zu erhalten, indem man die Wurzel zieht

$$x = g(y) = \pm\sqrt{y} \quad (4)$$

$$f(x,y) = e^{\sin(y)} \cdot (1 + 0.5 \cdot \cos(x^2)) \cdot 0.5$$

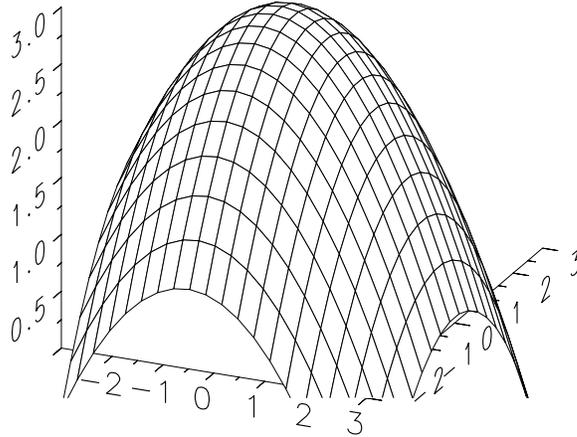


Abbildung 5: Ein Beispiel für eine Funktion die von zwei Variablen abhängt. Die Funktion beschreibt hier eine etwas seltsame Fläche, deren analytischer Ausdruck im Bild angegeben ist.

Beispiel 2: Die Umkehrfunktion von  $y = x^3$  ist  $x = g(y) = y^{1/3}$  oder von  $y = x^n$  ist es  $x = g(y) = y^{1/n}$ . Bei geradzahligem Wurzeln ( $n = 2m$ ) sind für das Vorzeichen beide Möglichkeiten  $\pm$  anzunehmen.

Die Umkehrfunktion der in Abb. 3 gezeigten e-Funktion ist der Logarithmus  $\ln(x)$ , welche ebenfalls dort gezeigt ist.

## 1.4 Gewöhnliche Ableitungen

Eine Funktion charakterisiert man zuerst mal nach auffälligen Merkmalen. Dies sind Maxima, Minima, Wendepunkte, Unendlichkeitsstellen, Knicke, etc. Man findet sie am einfachsten, wenn man nacheinander eine Reihe von Ableitungen bestimmt.

Eine Funktion  $f(x)$  heißt differenzierbar an der Stelle  $x_0$ , falls der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad (5)$$

existiert.  $f'(x_0)$  nennt man die Ableitung (Steigung) der Funktion  $f(x)$  im Punkt  $x_0$ . Es gibt dafür auch andere und oft benutzte äquivalente Schreibweisen

$$f'(x_0) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = f_x(x_0). \quad (6)$$

Handelt es sich bei der Variablen  $x$  um die Zeit  $t$ , so ist bei einer zeitabhängigen

Funktion  $g(t)$  für die Ableitung auch die Schreibweise

$$\dot{g}(t) = \left. \frac{dg}{dt} \right|_{t=t_0} \quad (7)$$

üblich.

Bei differenzierbaren Funktionen ändert sich der Wert der Ableitung mit der Stelle  $x_0$  bzw.  $t_0$ , an der diese berechnet wird.  $f'(x)$  ist also selbst wieder eine Funktion. Nehmen wir als Beispielfunktion die Parabel  $f(x) = ax^2$  und wenden die Vorschrift (5) an:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} a = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} a = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x)a = 2ax. \quad (8)$$

Die Ableitung der Parabel  $f(x) = ax^2$  an der Stelle  $x$  ist also

$$f'(x) = 2ax \quad (9)$$

und hängt selbst wieder von  $x$  ab.  $f'(x)$  ist geometrisch nichts anderes als die Steigung einer Funktion  $f(x)$  an der Stelle  $x$ .

Der Anstieg der Tangente zur Kurve  $f(x)$  an der Stelle  $x_0$  wird beschrieben durch

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (10)$$

und in der Nähe von  $x_0$  ist  $T(x)$  eine lineare Approximation der ursprünglichen Funktion  $f(x)$ .

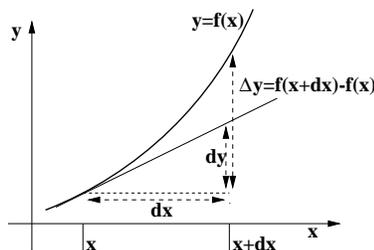


Abbildung 6:  $\Delta y$  ist also die Änderung von  $y = f(x)$  entlang des Wegstückes  $\Delta x = dx$ .  $dy$  ist die Änderung von  $y$  entlang der Tangente. D.h.  $dy$  ist die Tangentenapproximation (lineare Approx.) zu  $\Delta y$  und der Unterschied zwischen  $\Delta y$  und  $dy$  verschwindet für  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Beispiel zur Tangentenapproximation:

$f(x) = x^2$ ,  $x_0 = 1$  und  $\Delta x = 0.1 \rightarrow \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (1.1)^2 - 1^2 = 0.21$   
 und  $dy = f'(x_0)dx = 2x_0dx = 2 \cdot 1 \cdot 0.1 = 0.2$  .

Also ist  $\Delta y/\Delta x$  bereits für  $\Delta x = 0.1$  eine vernünftige Näherung für  $dy/dx$  bei  $x_0 = 1$ , welche für noch kleinere Werte von  $\Delta x$  noch besser wird.

**Das Differential** der Funktion  $y = f(x)$  ist

$$dy = f'(x)dx \quad (11)$$

und wegen  $y = f(x)$  ist für das Differential auch die Schreibweise  $df(x)$  üblich.

Beispiel 1: Der zurückgelegte Weg eines Teilchens nach der Zeit  $t$  und der Anfangsposition  $y_0$  zur Zeit  $t = 0$  wird durch Gl. (1) beschrieben. Die Ableitung  $f'(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(t - t_0)}{t - t_0} v = v$  ist offensichtlich die Geschwindigkeit  $v$ .

Beispiel 2: Die Ableitung der gemischten Funktion in Gl. (2) ist mit der Kenntnis des vorangegangenen Beispiels und Gl. (9) die Funktion  $f'(x) = a + 2x$ .

**Produktregel:** Oftmals ist  $f(x)$  aus anderen Funktionen zusammengesetzt, z.B. als Produkt  $f(x) = g(x)u(x)$  zweier differenzierbarer Funktionen. Die Parabel ist ein sehr einfaches Beispiel mit  $g(x) = u(x) = x$ . Der Differenzenquotient ist

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x)u(x + \Delta x) - g(x)u(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x)u(x + \Delta x) - g(x)u(x + \Delta x) + g(x)u(x + \Delta x) - g(x)u(x)}{\Delta x} \\ &= g'(x)u(x) + g(x)u'(x) \end{aligned} \quad (12)$$

Also gilt

$$\boxed{f'(x) = (gu)' = g'u + gu'} \quad \text{Produktregel} \quad (13)$$

Beispiel 3: Wenn man diese Produktregel auf  $f(x) = x^2$  anwendet, folgt  $f'(x) = x \cdot x' + x' \cdot x = 2x$  wie oben.

Beispiel 4: In einem weiteren Beispiel betrachten wir  $f(x) = x^3$ . Die Ableitung ist  $f'(x) = (x^3)' = x^2(x)' + (x^2)'x = x^2 + x(2x) = 3x^2$ . Es liegt nun folgende Vermutung nahe:  $(x^n)' = nx^{n-1}$ . Da aber über  $n$  nichts vereinbart wurde, muss auch gelten  $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$ . Wenden wir die Produktregel an:  $(x^{n+1})' = (x^n)'x + x^n(x)' = (n+1)x^n$ .

Also gilt diese Aussage auch für  $n+1$  und daher für jedes  $n$ . Für  $n = 2, 3$  hatten wir die Gültigkeit schon gezeigt.

$$\boxed{(x^n)' = \frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}} \quad (14)$$

Beispiel 5: Damit kann man nun auch die Ableitung der Funktion in Gl. (3) leicht berechnen:  $f'_p(x) = -2ax + 4x^3$ .

Die Ableitung der  $e^x$ -Funktion, von  $\ln(x)$  und den trigonometrischen Funktionen berechnen wir noch im Kapitel über die e-Funktion.

Neben einem Produkt von Funktionen sind auch noch Quotienten von Funktionen  $f(x) = g(x)/u(x)$  vorstellbar, welche wir wieder durch Ableitungen der Teilfunktionen darstellen können (siehe Tabelle).

Es sind auch zusammengesetzte Funktionen vorstellbar, wie beispielsweise bei  $f(u(x)) = u^2(x)$  mit  $u(x) = 2x + b$ . Bei deren Ableitung nach  $x$  geht man schrittweise vor. Mit  $y = f(u(x))$  kann man für die Differenzen durch Erweiterung des Bruches  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  auch schreiben

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (15)$$

Geht dann  $\Delta x \rightarrow 0$ , so strebt für stetiges  $u$  auch  $\Delta u \rightarrow 0$ . Damit kann der Grenzwert  $\Delta x \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (16)$$

gebildet werden und es folgt die Kettenregel für die Ableitung eines Produktes von Funktionen

$$\frac{df(u(x))}{dx} = \frac{df(u)}{du} \frac{du(x)}{dx} \quad \text{Kettenregel} \quad (17)$$

Damit folgt für das Beispiel  $\frac{df}{dx} = \frac{du^2}{dx} = \frac{du^2}{du} \frac{du}{dx} = 2u \cdot 2 = 4(2x + b)$ .

### Erste Ableitungsregeln

$(g(x) + u(x))'$	$= g'(x) + u'(x)$	Summenregel	
$(\alpha g(x))'$	$= \alpha g'(x)$	( $\alpha =$ Zahl)	
$(g \cdot u)'$	$= g'u + gu'$	Produktregel	
$\left(\frac{g}{u}\right)'$	$= \frac{g'u - gu'}{u^2},$	für $u(x) \neq 0$	Quotientenregel
$\frac{df(u(x))}{dx}$	$= \frac{df(u)}{du} \frac{du(x)}{dx}$	Kettenregel	(18)

## 1.5 Höhere Ableitungen

Oftmals ist die Ableitung  $h(x) = f'(x)$  einer Funktion  $f(x)$  wieder differenzierbar, d.h. es existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = h'(x_0) = f''(x_0) \quad . \quad (19)$$

Hierfür findet auch häufig die Schreibweise

$$f''(x_0) = \frac{d^2 f}{dx^2} \quad (20)$$

Verwendung.

Beispiel 1:  $f(x) = bx^3$

$$\begin{aligned} f'(x) &= b \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x^3 + 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3) - x^3}{\Delta x} \quad b \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)b = 3x^2 b \end{aligned} \quad (21)$$

$h(x) = 3bx^2 = ax^2$  mit  $a = 3b$ . Die Ableitungen hiervon kennen wir aber schon aus dem Beispiel 3 aus Abschnitt 2.1:

$$h'(x) = 2ax = 6bx = f''(x) \quad (22)$$

Die zweite Ableitung ist im wesentlichen die Krümmung einer Kurve, wie z.B. die Parabel  $f(x) = ax^2$  verdeutlicht:  $f''(x) = 2a$ . (Genau gilt dies nur für verschwindende erste Ableitung). Für eine umgekehrte Parabel wird das Vorzeichen negativ.

Für die  $(n + 1)$ -te Ableitung ist

$$f^{(n+1)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x + \Delta x) - f^{(n)}(x)}{\Delta x}, \quad (23)$$

d.h. in dieser Notation  $f'(x) = f^{(1)}$ ,  $f''(x) = f^{(2)}$  etc. und  $f(x) = f^{(0)}$ .

## 1.6 Partielle Ableitungen

Nun gibt es nicht nur Funktionen die von einer Variablen  $x$  abhängen. Nehmen wir an, die Funktion hängt von zwei Variablen  $x$  und  $y$  ab:  $f(x, y)$ .  $f(x, y)$  beschreibt eine Funktion über der  $x - y$ -Ebene. Zwei Beispiele sind in Abb.7 gezeigt, nämlich eine Funktion mit einem Maximum und eine Funktion mit einem Sattelpunkt.

Auch bei Funktionen mehrerer Variablen ist oft die Ableitung bzw. Tangente zur Fläche zu bestimmen. Nur muß man sich nun entscheiden, ob z.B. die Ableitung an einer Stelle

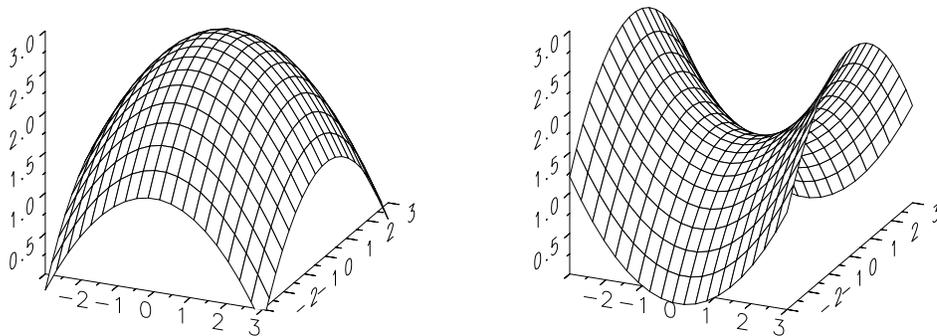


Abbildung 7: Zwei einfache Beispiele für ein Maximum und einen Sattelpunkt einer Funktion  $f(x, y)$ . Maximum:  $f(x, y) = -x^2 - y^2$ , Sattel:  $f(x, y) = x^2 - y^2$ .

$x_0$  in  $y$ -Richtung oder an einer festen Stelle  $y_0$  in  $x$ -Richtung berechnet werden soll. Im ersten Fall schreibt man

$$\frac{\partial f(x_0, y)}{\partial y} \quad (24)$$

und im zweiten Fall

$$\frac{\partial f(x, y_0)}{\partial x} \quad (25)$$

Diese beiden Ausdrücke werden partielle Ableitung bzgl.  $y$  bzw.  $x$  genannt.

Solange die Funktion zweimal differenzierbar ist, wovon wir hier ausgehen, können Ableitungen aber auch hintereinander geschaltet werden.

Da die Funktion nun von zwei Variablen abhängt, sind zwei Bedingungen nötig um z.B. die Lage eines Extremums zu bestimmen. Hierfür stehen nun die beiden Bedingungen

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (26)$$

zur Verfügung. Ob es sich um eine Minimum oder Maximum handelt, kann durch Analyse der zweiten Ableitungen

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (27)$$

bestimmt werden. Gilt z.B.  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} < 0$  und  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} > 0$ , so handelt sich um einen Sattelpunkt.

Beispiel:  $g(x, y) = x^2y^3$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} y^3 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) y^3 = 2xy^3 \quad , \\ \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(y + \Delta y)^3 - y^3}{\Delta y} x^2 = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} (3y^2 + 3y\Delta y + \Delta y^3) x^2 \\ &= 3y^2 x^2 \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} &= 6xy^2\end{aligned}\tag{28}$$

## 1.7 Totales Differential

Wie das Differential einer Funktion einer Veränderlichen möchten wir jetzt auch dasjenige für eine Funktion zweier Veränderlicher  $z = f(x, y)$  bestimmen.

Die Änderung  $\Delta z$  eines Funktionswertes  $z = f(x, y)$ , die dieser erfährt, wenn die beiden unabhängigen Variablen  $x$  und  $y$  um  $\Delta x$  und  $\Delta y$  geändert werden, ist

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y) \quad .\tag{29}$$

Geometrisch bedeutet  $\Delta z$  die Höhenänderung eines Punktes, der auf der von  $f(x, y)$  beschriebenen Fläche von  $P = (x, y, z)$  nach  $P_1 = (x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$  verschoben wird. Das Differential  $dz$  läßt sich als die zugehörige Höhenänderung der Tangentialebene darstellen, die in  $P = (x, y, z)$  an die Fläche  $z = f(x, y)$  angelegt ist, wenn man sich auf der Tangentialebene vom Berührungspunkt weg bewegt. Wie bei einer einzigen Variablen lassen sich wieder

$$\Delta x = dx \quad \text{und} \quad \Delta y = dy\tag{30}$$

setzen. Auch ist wieder zu beachten, dass sich das Differential  $dz$  und die Differenz  $\Delta z$  der abhängigen Variablen wegen ihrer verschiedenen geometrischen Bedeutung im allgemeinen voneinander unterscheiden. Das Differential läßt sich leicht mit Hilfe der partiellen Ableitungen bestimmen. Man nennt

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\tag{31}$$

das vollständige oder totale Differential der Funktion  $z = f(x, y)$ . Für kleine Werte von  $dx$  und  $dy$  gilt wieder die wichtige Näherung  $dz \approx \Delta z$ . Hiervon wird z.B. auch bei der Fehlerrechnung im Praktikum Gebrauch gemacht.

Beispiel: Man berechne  $\Delta z$  und  $dz$  der Funktion  $z = 2x + y^2$  an der Stelle  $x = 3, y = 5$  für  $dx = 0.3$  und  $dy = 0.2$ .

Lösung: Man erhält an der Stelle  $(x = 3; y = 5)$

$$z_1 = f(x; y) = f(3; 5) = 6 + 25 = 31\tag{32}$$

sowie  $z_2 = f(x + dx; y + dy) = f(3, 3; 5, 2) = 6,6 + 27,04 = 33,64$ . Damit wird  $\Delta z = z_2 - z_1 = 2,64$ .

Für  $dz$  ergibt sich  $dz = 2dx + 2ydy = 0,6 + 2 = 2,60$ . Tatsächlich gilt also  $\Delta z \approx dz$ .

Die für  $z = f(x, y)$  angestellten Betrachtungen lassen sich leicht auf Funktionen mit beliebig vielen Variablen erweitern. Werden für die Funktion  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  die unabhängigen Variablen um die Werte  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$  verändert, dann ergibt sich das totale Differential mit

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \quad . \quad (33)$$

Für die Änderung  $\Delta z = f(x_1 + dx_1, \dots, x_n + dx_n) - f(x_1, \dots, x_n)$  des Funktionswertes  $f$  gilt bei kleinen Änderungen  $dx_1, \dots, dx_n$  ebenfalls die Näherung  $\Delta z \approx dz$ .

## 1.8 Tabelle einiger wichtiger Ableitungen

Einige der im folgenden auftauchenden Funktionen werden erst später erklärt, sind aber der Vollständigkeit halber hier schon aufgeführt.

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow f'(x) \\ x^q &\rightarrow q x^{q-1} \quad (q \neq 0, q \in \mathcal{Q}) \\ e^{ax} &\rightarrow a e^{ax} \\ \ln x &\rightarrow 1/x \\ \cos x &\rightarrow -\sin x \\ \sin x &\rightarrow \cos x \\ \sin(ax) &\rightarrow a \cos(x) \\ \tan(ax) &\rightarrow \frac{a}{\cos^2(ax)} = a(1 + \tan^2(ax)) \\ \cot(ax) &\rightarrow \frac{-a}{\sin^2(ax)} = -a(1 + \cot^2(ax)) \\ \tanh(ax) &\rightarrow a(1 - \tanh^2(ax)) = \frac{a}{\cosh^2(ax)} \\ \coth(x) &\rightarrow -\frac{1}{\sinh^2(x)} \\ \arcsin(x) &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \arccos(x) &\rightarrow -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \arctan(x) &\rightarrow \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{arccot}(x) &\rightarrow -\frac{1}{1+x^2} \\
\operatorname{arsinh}(x) &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & -1 \leq x \leq 1 \\
\operatorname{arcosh}(x) &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} & x > 1 \\
\operatorname{artanh}(x) &\rightarrow \frac{1}{1-x^2} & |x| < 1 \\
\operatorname{arcoth}(x) &\rightarrow \frac{1}{1-x^2} & |x| > 1
\end{aligned} \tag{34}$$

## 2 Vektoren I - in der Ebene und Polarkoordinaten

Die bisher besprochenen Funktionen sind skalare Größen:  $f(x)$  an einer bestimmten Stelle  $x_0$  ist eine Zahl, ein Skalar. In der Physik sind dies zum Beispiel Zeit, Masse, Energie und Temperatur. Diese sind durch eine Zahl und eine physikalische Dimension gegeben: 1.345 sec, 78 kg, 10 Joule oder  $-177^\circ$  C usw. Hier in einem mathematischen Einführungskurs, wie auch sonst häufig, sehen wir meistens von der Dimension ab und beschreiben skalare Größen durch *Zahlen*:  $t = 78.9$ ,  $m = 97$ ,  $E = 10$ ,  $T = 25$  usw..

Andere physikalische Größen wie etwa die Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung usw. sind durch eine Richtung und einen Betrag gegeben (wobei aber der Betrag wieder eine skalare Größe ist). Eine derartig gerichtete Größe beschreibt man ganz praktisch und intuitiv durch einen Pfeil.

Das  $k$ -fache einer Kraft oder einer Geschwindigkeit wird durch einen Pfeil in gleicher Richtung, aber mit der  $k$ -fachen Länge veranschaulicht, die Gegenkraft durch einen Pfeil gleicher Länge, aber entgegengesetzter Richtung.

Greifen zwei Kräfte  $\vec{k}_1$  und  $\vec{k}_2$  in einem Punkt  $P$  an, so bewirken sie insgesamt dasselbe wie eine einzige Kraft. Die resultierende Kraft  $\vec{k}_{res}$  ergibt sich geometrisch durch die skizzierte Parallelogrammkonstruktion in Abb. 8. Umgekehrt werden Kräfte nach diesem Prinzip in Komponenten vorgegebener Richtung zerlegt. Entsprechendes gilt für andere vektorielle Größen.



Abbildung 8: a) Ein Vektor für eine gerichtete Größe. b) Überlagerung von Vektoren.

### 2.1 Koordinatendarstellung von Vektoren

Eine gerichtete Größe durch einen Pfeil darzustellen ist plausibel. Um damit auch vernünftig rechnen zu können, muß man so einem Pfeil Zahlen zuordnen. Hierzu müssen erst einmal Vereinbarungen getroffen werden.

Wenn Sie in einer Stadt jemandem die Lage einer in der Nähe liegenden Straße beschreiben, ist es häufig ganz praktisch, dies mit Hilfe der Anzahl von Abzweigungen zu machen: Z.B. an der dritten Kreuzung nach links abzweigen und dann die vierte Querstraße. Beschreiben Sie die Lage eines Objektes in einem Raum, so liegt es nahe, dies wie folgt zu tun: Von der Raumecke an der Eingangstüre 2 Meter an der linken Wand entlang und dann zu dieser Wand senkrecht 3 Meter nach rechts. Treffen Sie die Vereinbarung, dass die Wegstrecke nach rechts zuerst vor der Wegstrecke nach links

genannt wird, so können Sie die Lage nun durch das Zahlenpaar  $(3, 2)$  Meter angeben. Jetzt können sie noch die Richtung entlang der linken Wand als  $y$ -Achse bezeichnen und die entlang der rechten Wand als  $x$ -Achse, und damit die Lage wie in Abb. 9 veranschaulichen.

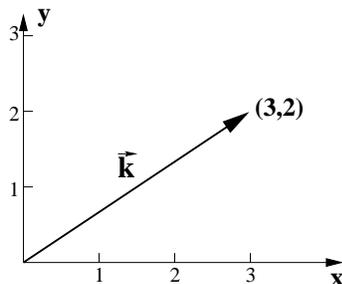


Abbildung 9: Die Koordinaten  $(x = 3, y = 2)$  im kartesischen  $x - y$  Koordinatensystem geben die Lage des Punktes  $P$  an. Andererseits beschreibt das Zahlenpaar auch den Vektorpfeil  $\vec{r}$ , der bei  $(0, 0)$  startet und bei  $(3, 2)$  endet.

Ganz analog liegt es im dreidimensionalen Raum nahe, anstelle eines ebenen Koordinatensystems ein kartesisches Koordinatensystem mit drei Raumachsen  $x, y$  und  $z$  einzurichten und einen Punkt  $P$  im Raum bzw. einen Vektor vom Ursprung zum Punkt  $P$  durch ein Zahlentripel  $(x, y, z)$  zu beschreiben.

Für einen Vektorpfeil, der z.B. der durch ein Zahlentripel (oder in der Ebene durch ein Zahlenpaar) beschrieben wird, sind die Notationen  $\vec{r}$  und  $\mathbf{r}$  üblich. Wir werden hier vorwiegend die zweite Notation verwenden

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (35)$$

### 2.1.1 Länge und Norm eines Vektors

Für die Länge oder Norm eines Vektors schreibt man  $|\mathbf{r}|$ . Es entspricht dem Abstand eines Punktes  $P$  vom Ursprung, welcher durch  $\mathbf{r}$  beschrieben wird. Dessen Abstand läßt sich in der Ebene mit den Regeln (Pythagoras) zur Berechnung der Hypotenuse eines Dreieckes bestimmen

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (36)$$

Analog ist die Länge eines Vektors in 3 Dimensionen

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (37)$$

und für einen Vektor in  $N$  Dimensionen  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  (wobei wir hier nun den Vektor als Zeile geschrieben haben) ist die Länge

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}. \quad (38)$$

### 2.1.2 Elementare Rechenregeln für Vektoren

Ein Vektor  $\mathbf{r}_1$  kann auch verschoben werden, indem ein zweiter Vektor  $\mathbf{r}_2$  hinzuaddiert wird. Hierbei werden einfach die Komponenten addiert

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Es ist daraus unmittelbar einsichtig, da die Reihenfolge der Addition beliebig ist. Die Summe ergibt immer den gleichen Endpunkt, was man sich leicht wie in Abb. 10 veranschaulichen kann.

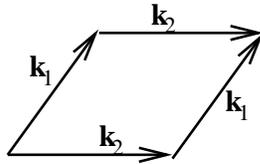


Abbildung 10: Addition von Vektoren bzw. deren Verschiebung ist vertauschbar.

Es gilt also auch für Vektoren wie für Zahlen (also den Komponenten) das Kommutativgesetz.

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \quad (40)$$

Es gibt ein neutrales Element  $\mathbf{0}$

$$\mathbf{r} + \mathbf{0} = \mathbf{r} \quad (41)$$

und die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl  $a$  entspricht einer Multiplikation der Komponenten des Vektors,

$$a\mathbf{r} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix}, \quad (42)$$

was einer Längenänderung entspricht:  $|a\mathbf{r}| = a|\mathbf{r}|$  ( $a > 0$ ).  
Ausserdem gilt für Vektoren auch das Assoziativgesetz.

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \quad (43)$$

## 2.2 Parameterdarstellung von Geraden

Sind  $A$  und  $B$  zwei verschiedene Punkte mit Ortsvektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  und ist  $g$  die Gerade durch  $A$  und  $B$ , so sind die Punkte von  $g$  durch die Ortsvektoren  $\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$  mit  $t \in \mathcal{R}$  gegeben. Hierfür schreibt man (mit  $\mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ )

$$g = \{\mathbf{a} + t\mathbf{v} \mid t \in \mathcal{R}\} \quad (44)$$

und man nennt  $g$  die Gerade durch den Punkt  $\mathbf{a}$  mit *Richtungsvektor*  $\mathbf{v}$  in Parameterdarstellung.

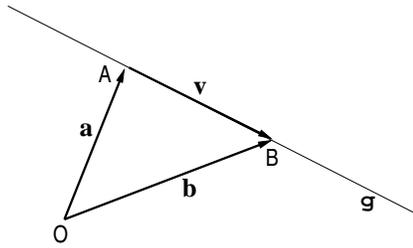


Abbildung 11: *Parameterdarstellung einer Geraden.*

## 2.3 Schnitt zweier Geraden und lineares Gleichungssystem

Betrachten wir zwei Geraden

$$g = \{\mathbf{a} + x_1 \mathbf{b} \mid x_1 \in \mathcal{R}\} \quad \text{und} \quad f = \{\mathbf{c} + x_2 \mathbf{d} \mid x_2 \in \mathcal{R}\} \quad (45)$$

Ist  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{c} = \mathbf{0}$  (mit  $\mathbf{b} \neq \mathbf{d}$ ) so schneiden sich beide Geraden offensichtlich bei  $x_1 = x_2 = 0$ . Klar! Sind aber  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  und  $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ , dann schneiden sich die beiden Geraden nur, wenn die Bedingung

$$\mathbf{a} + x_1 \mathbf{b} = \mathbf{c} + x_2 \mathbf{d} \quad (46)$$

erfüllt ist - die Geraden also einen gemeinsamen Punkt haben. Aus dieser Bedingung können wir bei gegebenen Vektoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}$  die notwendigen Werte für  $x_1$  und  $x_2$  berechnen. Schreiben wir die Vektoren in Komponentendarstellung

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad (47)$$

so wird offensichtlich, dass die Vektorgleichung (46) eigentlich zwei gekoppelte lineare Gleichungen in den noch Unbekannten  $x_1$  und  $x_2$  bedeutet:

$$\begin{aligned} x_1 b_1 - x_2 d_1 &= c_1 - a_1, \\ x_1 b_2 - x_2 d_2 &= c_2 - a_2. \end{aligned} \quad (48)$$

Identifiziert man  $a_{11} = b_1$ ,  $a_{12} = -d_1$ ,  $a_{21} = b_2$ ,  $a_{22} = -d_2$ ,  $y_1 = c_1 - a_1$ ,  $y_2 = c_2 - a_2$ , so lässt sich Gl.(48) umschreiben in

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 &= y_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 &= y_2. \end{aligned} \quad (49)$$

Definieren wir eine quadratische Anordnung von Zahlenfeldern (Reihen und Spalten) als **Matrix**, so lässt sich eine derartige Gleichung übersichtlich als Matrix-Gleichung schreiben

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Mit der weiteren Abkürzung für die Koeffizientenmatrix

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (51)$$

kann Gleichung (50) in eine noch kompaktere Form gebracht werden

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}, \quad (52)$$

an der man auf den ersten Blick gar nicht mehr erkennt, um wieviele gekoppelte lineare Gleichungen es sich handelt.

Damit hat sich hier im Falle des zweidimensionalen Raumes - zwei Unbekannte  $x_1$  und  $x_2$  - neben dem Vektor die Matrix als Verallgemeinerung des Variablenbegriffs ergeben. Sollen damit z.B. Gleichungssysteme kompakter geschrieben werden, so müssen für Matrizen noch Rechenregeln abgeleitet werden, die wir noch später besprechen. Aufgrund der mit Matrizen verbundenen Rechenregeln bezeichnet man Matrizen gelegentlich auch als Operatoren.

Wir erkennen auch bereits durch Vergleich von (52) mit (49), wie das Produkt einer Matrix  $\mathcal{A}$  mit einem Vektor ausgeführt wird. Erstens erkennt man an (52), dass  $\mathcal{A}\mathbf{x}$ , also (Matrix  $\times$  Vektor), wieder ein Vektor ist. In der ersten Zeile dieses resultierenden Vektors stehen die ausmultiplizierten Faktoren der ersten Zeile der Matrix mit dem Vektor  $\mathbf{x}$ , nämlich  $a_{11}x_1 + a_{12}x_2$ , und das Produkt der zweiten Zeile der Matrix mit dem Vektor  $\mathbf{x}$ ,  $a_{21}x_1 + a_{22}x_2$ , steht in der zweiten Komponente. Multiplikationen von mehrkomponentigen Vektoren mit entsprechenden Matrizen werden ebenso ausgeführt.

Wir versuchen nun das Gleichungssystem (48) bzw. (50) zu lösen und  $x_1$  und  $x_2$  zu bestimmen. Hierfür eliminieren wir erst einmal eine der beiden Unbekannten  $x_i$ , indem wir die erste Gleichung in (49) mit  $a_{22}$  multiplizieren und die zweite aus (49) mit  $a_{12}$  und beide voneinander subtrahieren. Dies ergibt

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = a_{22}f_1 - a_{12}f_2. \quad (53)$$

Entsprechend gibt  $a_{21} \cdot$  (Zeile 1) -  $a_{11} \cdot$  (Zeile 2)

$$(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})x_2 = a_{21}f_1 - a_{11}f_2. \quad (54)$$

Der Vorfaktor von  $x_1$  bzw.  $x_2$  in den beiden vorangegangenen Gleichungen ist nichts anderes als die **Determinante** der Matrix  $\mathcal{A}$  aus Gleichung (52)

$$\det(\mathcal{A}) = D = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \quad (55)$$

Damit sehen wir, dass die beiden Gleichungen (53) und (54) gerade dann lösbar sind, wenn die Determinante  $D$  verschieden von Null ist, ansonsten würden wir ja durch 0 dividieren. Diese **Lösbarkeitsbedingung** gilt auch in 3 und höheren Dimensionen,

die Berechnung der Determinante ist nur entsprechend komplizierter.

Für  $D \neq 0$  sind die beiden Lösungen

$$x_1 = \frac{1}{D} (a_{22}f_1 - a_{12}f_2), \quad x_2 = \frac{1}{D} (a_{11}f_2 - a_{21}f_1). \quad (56)$$

Ist die Determinante Null, so sind obige Gleichungssysteme nicht oder nicht eindeutig lösbar, wir haben es in Wirklichkeit nicht mit zwei unabhängigen Gleichungen zu tun.

Ist das Gleichungssystem (52) andererseits homogen, d.h.  $\mathbf{f} = 0$ , dann gibt es zwei Möglichkeiten. Für die Determinante gilt  $D \neq 0$ , dann gibt es nur Lösungen  $\mathbf{x} = 0$ , oder die Determinante verschwindet, dann gibt es Lösungen  $\mathbf{x} \neq 0$  dieses homogenen Gleichungssystems.

## 2.4 Polarkoordinaten

In der Ebene kann ein durch die Pfeilspitze des Vektors  $\mathbf{a}$  gekennzeichneteter Punkt durch den Abstand vom Ursprung, also der Länge des Vektors  $r = |\mathbf{a}|$ , und einem Winkel  $\alpha$  zwischen dem Vektor und der  $x$ -Achse beschrieben werden. Dies sind ebenfalls zwei Zahlen -  $r$  und  $\alpha$  - wie die Anzahl der Komponenten des Vektors  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ . Man schreibt also für den Vektor in *Polardarstellung*

$$\mathbf{a} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad -\pi \leq \alpha < \pi \quad (57)$$

Wegen  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$  gilt dann nach Konstruktion für die Länge  $|\mathbf{a}| = r$ . In drei Dimensionen sind das Analogon die Kugelkoordinaten, die wir später noch besprechen werden.

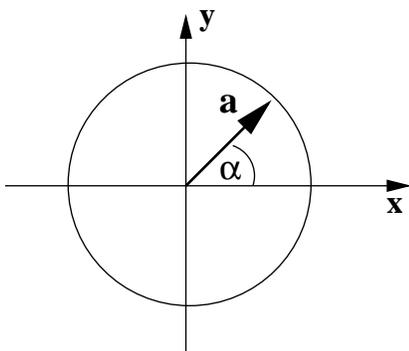


Abbildung 12: Vektor  $\mathbf{a} = r(\cos \alpha, \sin \alpha)$  in Polarkoordinaten.

Betrachtet man noch einen zweiten Vektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = r_b \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad -\pi \leq \beta < \pi \quad (58)$$

mit  $r_b = |\mathbf{b}|$ , so stellt sich z.B. die interessante Frage, welchen Winkel diese beiden Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  einschließen.

## 2.5 Skalarprodukt

Die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl führt zu einer Verlängerung des Vektors (siehe Abschn.2). Für das Produkt zweier Vektoren kann man sich verschiedene Möglichkeiten vorstellen. Z.B ist das Skalarprodukt zweier Vektoren so definiert, dass das Ergebnis eine reelle Zahl (ein Skalar) ist.

$$\begin{aligned} \text{Definition Skalarprodukt} \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \\ \text{bzw.} \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \sum_{i=1}^N a_i b_i \end{aligned} \quad (59)$$

Das Skalarprodukt ist ein Maß für den Winkel  $\varphi$  zwischen beiden Vektoren.

$$\boxed{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi} \quad (60)$$

Mit  $\mathbf{a} = (r \cos(\phi), r \sin(\phi))$  (Polardarstellung) und  $\mathbf{b} = (1, 0)$  ist dies unmittelbar einsichtig:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = r \cos(\phi)$ .

Dreht man beide Vektoren um einen Winkel  $\beta$ , verändert aber den Winkel zwischen beiden nicht, dann ändert sich am Ergebnis nichts, da der Winkel zwischen beiden Vektoren unverändert bleibt!

Mit der Berechnung der Summe in (59) und der Längen der beiden Vektoren ist der Winkel  $\varphi$  leicht zu bestimmen und zwar in der Ebene und im Volumen. Zum Skalarprodukt sagt man auch häufig in der Literatur "Inneres Produkt".

### Regeln für das Skalarprodukt

S1	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$	kommutativ
S2	$\mathbf{a} \cdot (\alpha \mathbf{b}) = \alpha \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	assoziativ
S3	$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$	distributiv bzw. additiv

## 2.6 Vektorprodukt im $\mathcal{R}^3$

Dieser Begriff hat nur im dreidimensionalen Raum Bedeutung. Das Skalar-Produkt zweier Vektoren ergab eine Zahl. Nun ist auch ein sinnvolles Produkt von Vektoren denkbar, welches wieder einen Vektor ergibt. Ein wichtiges Beispiel ist das Vektorprodukt im dreidimensionalen Raum (siehe physikalische Motivation am Ende des Kapitels).

**Zielsetzung:** Zu gegebenen Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{R}^3$ , die nicht parallel sind (genauer: die linear unabhängig sind) soll ein dritter Vektor  $\mathbf{c} \in \mathcal{R}^3$  mit den im folgenden beschriebenen Eigenschaften bestimmt werden.

**Das Vektorprodukt:** Für Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (61)$$

nennt man den Vektor

$$\boxed{\mathbf{c} := \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}} \quad (62)$$

Vektorprodukt oder Kreuzprodukt. Man kann zur Kontrolle leicht nachrechnen, dass  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$  und  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$  gilt, also  $\mathbf{c}$  senkrecht auf  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  steht. Andere in der Literatur benutzte Bezeichnungen sind  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ,  $[\mathbf{a}\mathbf{b}]$

Eine wichtige Eigenschaft des Vektorproduktes ist, dass die Länge von  $\mathbf{c}$  dem Flächeninhalt des von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  aufgespannten Parallelogramms entspricht. Es ist also

$$\boxed{|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \varphi}, \quad (63)$$

wo  $0 \leq \varphi < \pi$  der Winkel zwischen den Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  ist. Das kann man schnell nachrechnen indem man die Quadrate davon betrachtet.

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2 \varphi &= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 (1 - \cos^2 \varphi) = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 \end{aligned} \quad (64)$$

Aus der Definition ergeben sich auch noch folgende leicht nachrechenbare Aussagen.

$$\begin{aligned} (1) \quad & \mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b} \\ (2) \quad & \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \\ (3) \quad & \mathbf{a} \times (r\mathbf{b}) = r(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\ (4) \quad & (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = 0 \quad \text{und} \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0 \end{aligned} \quad (65)$$

Für das angegebene Vektorprodukt gilt nicht das Kommutativgesetz, stattdessen gilt das in (1) angegebene Gesetz. Auch das Assoziativgesetz gilt nicht, jedoch gilt das Distributivgesetz (2) und damit eine der wichtigsten Regeln für eine Multiplikation in einem Bereich, in dem auch eine Addition definiert ist.  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  bilden ein positiv orientiertes Dreiein, d.h. die Vektoren liegen im Raum wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand ("Dreifingerregel"). Diese Formeln werden wichtig etwa bei schraubenartigen Bewegungen im Raum (geladene Teilchen im Magnetfeld).

### 3 $e$ -Funktion, Reihen, erste Differentialgleichung

In diesen Abschnitt beschäftigen wir uns mit der in den Naturwissenschaften und in der Technik laufend vorkommenden und auch in der Mathematik zentralen Exponentialfunktion. Bevor wir jedoch die Zahl  $e$  berechnen und uns Beispielen zuwenden, in denen die  $e$ -Funktion auftritt, machen wir uns ganz kurz mit einigen elementaren Fakten zu Folgen und Reihen vertraut.

#### 3.1 Folgen und Reihen

Zahlenfolgen haben große Bedeutung, welche z.B. darauf beruht, dass viele Zahlen wie z.B. die Zahl  $e$  und andere Ausdrücke sich nicht exakt angeben lassen, sondern nur durch geeignete Zahlenfolgen approximieren lassen. Auch bei vielen Beispielen aus Physik und Technik ist das Ergebnis der Grenzfall einer Zahlenfolge oder die Summe einer Zahlenfolge. Mit der geometrischen Reihe wird sogar eine Funktion durch eine Reihe definiert.

##### 3.1.1 Arithmetische Reihen

Ein sehr einfaches Beispiel ist die Summe der Folge natürlicher Zahlen  $1, \dots, N$

$$1 + 2 + 3 + \dots + N =: \sum_{k=1}^N k = S_N,$$

wobei die Summe (Reihe)  $S_N$  auch wieder eine Zahlenfolge ist. Welchen Zahlenwert ergibt diese Summe? Probieren wir:  $1 + 2 = 3 = \frac{2 \cdot 3}{2}$ ;  $1 + 2 + 3 = 6 = \frac{3 \cdot 4}{2}$ ;  $1 + 2 + 3 + 4 = 10 = \frac{4 \cdot 5}{2} \dots$  Demzufolge scheint zu gelten

$$\boxed{\sum_{k=1}^N k = \frac{N(N+1)}{2}} \quad (66)$$

Wir können dies durch Induktion überprüfen, wobei wir das für die ersten vier Zahlen  $N = 1, 2, 3$  bereits getan haben. Gilt also nach dem Übergang  $N \rightarrow N + 1$  für beliebige  $N$  wieder die gleiche Formel?

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N+1} k &= \sum_{k=1}^N k + (N + 1) = \frac{N(N + 1)}{2} + (N + 1) = \\ &= \frac{N(N + 1) + 2N + 2}{2} = \frac{N^2 + 3N + 2}{2} = \frac{(N + 1)(N + 2)}{2}, \end{aligned}$$

D.h. die Regel gilt auch für  $N + 1$ . Dies können wir nun beliebig oft wiederholen und die Regel gilt daher für alle Werte der natürlichen Zahl  $N$ . Die Zahlenfolge  $1; 2; 3; 4; \dots$ , über die soeben summiert wurde, ist eine sogenannte arithmetische Zahlenfolge.

**Definition:** Bei **arithmetischen Zahlenfolgen** ist der Abstand (die Differenz) zweier aufeinanderfolgender Glieder immer eine Konstante  $d$

$$a_{\nu+1} - a_{\nu} = d \quad . \quad (67)$$

Weitere Beispiele sind a)  $1; 3; 5; 7; \dots$  (also  $d = 2$ ) oder b)  $1; \frac{1}{2}; 0; -\frac{1}{2}; \dots$  (also  $d = -\frac{1}{2}$ ). Die Summenformel für arithmetische Zahlenfolgen ist

$$S_N = \sum_{\nu=1}^N a_{\nu} = \frac{N}{2}(a_1 + a_N) \quad (68)$$

### 3.1.2 Geometrische Reihe

**Definition:** Bei **geometrischen Zahlenfolgen**  $a_{\nu}$  ist der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder immer eine Konstante  $q$ . Also gilt

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_{\nu}} = q \quad (\text{konstant}) \quad .$$

Beispiel: Die Folge  $a_{\nu} = (\frac{1}{2})^{\nu-1}$  mit  $\nu = 1, \dots, N$  erfüllt das Kriterium der geometrischen Zahlenfolge,  $a_{\nu+1}/a_{\nu} = 1/2$ , aber auch jede andere Folge aus Potenzen einer Zahl  $b$ , wie  $a_{\nu} = b^{\nu-1}$ , erfüllt dieses Kriterium.

Nun wollen wir die Summe der geometrischen Zahlenfolge berechnen.

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1} = a_0(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{N-1}) = a_0 \sum_{\nu=1}^N q^{\nu-1} = a_0 S_N \quad .$$

Multiplizieren wir die Reihe  $S_N$  mit  $q$  und subtrahieren davon wieder  $S_N$ , so folgt

$$qS_N - S_N = (q - 1)S_N = q^N - 1$$

oder

$$\boxed{S_N = \sum_{\nu=1}^N q^{\nu-1} = \frac{1-q^N}{1-q}} \quad (69)$$

Ist zusätzlich  $q < 1$ , so strebt für große Werte von  $N$   $\lim_{N \rightarrow \infty} q^N \rightarrow 0$  und man kann diese Reihe sogar für unendlich viele Terme aufsummieren.

$$\boxed{\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^N q^{\nu-1} = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1 \quad (70)}$$

Die Zahlenfolge  $S_N$  hat also für  $|q| < 1$  einen berechenbaren Grenzwert. Die geometrische Reihe ist ein Beispiel für die Reihendarstellung einer Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad (71)$$

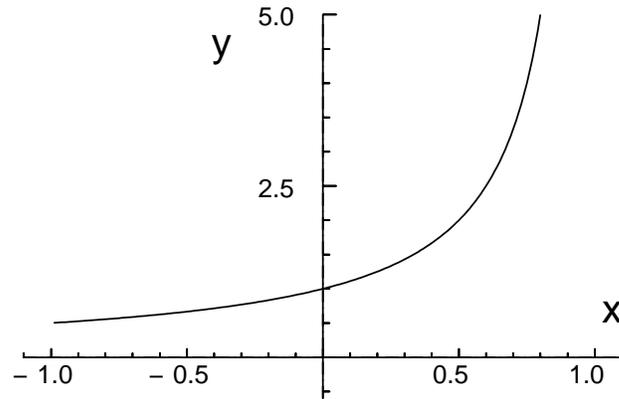


Abbildung 13: Die Funktion  $f(x) = 1/(1-x)$

(siehe Abb. 13). Ein konkretes Zahlenbeispiel für die geometrische Reihe ist:

$$4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(-3)^n} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{-3}\right)^n = \frac{4}{1 - \left(\frac{1}{-3}\right)} = 3 \quad . \quad (72)$$

Ein völlig anderes Ergebnis liefert dagegen folgende Summe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = \zeta(a) \quad . \quad (73)$$

Dies ist die Riemann'sche Zeta-Funktion, die hier aber nicht weiter diskutiert werden soll.

### 3.2 Die e-Funktion (= Exponentialfunktion)

Im Abschnitt 1.4 haben wir gesehen, dass die Ableitung einer Parabel  $y' = (x^2)' = 2x$  ist. Die Umkehrfunktion der Parabel  $y = x^2$  ist  $x = \sqrt{y}$  und damit kann  $x$  eliminiert werden und es folgt  $y' = 2\sqrt{y}$ . Wenn eine Ableitung selbst wieder von der ursprünglichen Funktion abhängt, spricht man von einer *Differentialgleichung*, worauf gleich und später noch eingegangen wird.

Eine Vielzahl von Prozessen in Natur und Gesellschaft, bei denen eine gewisse Größe  $y(t)$  im Laufe der Zeit ab- oder zunimmt, sind Wachstums- oder Schrumpfungsprozesse deren Änderung von  $y(t)$  proportional zum momentanen Wert  $y(t)$  ist. Z.B. ist die absolute Änderung einer Population proportional zur momentanen Größe der Population - eine größere Zahl produziert mehr Nachkommen. Schreitet man um einen kleinen Zeitschritt  $\Delta t$  voran, so wächst oder fällt die Funktion um  $\Delta y(t)$ . Diese kleine

Änderung  $\Delta y(t) = y(t + \Delta t) - y(t)$  ist auch noch proportional zum Zeitschritt  $\Delta t$ , also insgesamt

$$\Delta y(t) = y(t + \Delta t) - y(t) = \alpha y(t) \cdot \Delta t, \quad (74)$$

wobei  $\alpha$  eine vom aktuellen System abhängige Proportionalitätskonstante ist und Auskunft über die Stärke des Wachstums oder der Schrumpfung gibt.

Es muss nicht unbedingt eine Population sein. Liegt eine vorgegebene Menge radioaktiver Elemente vor, dann zerfallen absolut gesehen umso weniger Elemente pro Zeiteinheit je weniger radioaktive Elemente vorhanden sind. Wenn man sein Kapital anlegt, dann ist der Zuwachs pro Zeiteinheit auch umso größer, je größer das eingesetzte Kapital ist. Dies sind alles ähnliche Wachstums- oder Schrumpfungsprozesse.

Die Frage ist nun, ob man mit Hilfe dieses "im Kleinen" oder "lokal" gültigen Änderungsgesetzes nicht auch den Endzustand eines *längerdauernden* Prozesses bis zu einem länger entfernten Zeitpunkt  $T$  berechnen kann. Hierzu unterteilen wir das Intervall  $[0, T]$  in  $k = 0, 1, \dots, m$  Teilintervalle mit den Intervallgrenzen  $t_k = k(T/m)$  und  $\Delta t = T/m$ . Setzen wir  $y_k = y(t_k)$ , so erhalten wir folgende Näherungsgleichungen.

$$\begin{aligned} y_1 &\approx \left(1 + \alpha \frac{T}{m}\right) y_0, \\ y_2 &\approx \left(1 + \alpha \frac{T}{m}\right) y_1 \sim \left(1 + \alpha \frac{T}{m}\right)^2 y_0, \\ &\dots \\ &\dots \\ y(T) = y_m &\approx \left(1 + \alpha \frac{T}{m}\right)^m y_0, \end{aligned}$$

Da  $(1 + \alpha \frac{T}{m})^m y_0$  den Endzustand  $y(T)$  umso besser beschreiben wird, je kleiner  $\Delta t = T/m$  und je größer also  $m$  gewählt wurde, wird man vermuten, dass

$$y(T) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \alpha \frac{T}{m}\right)^m y_0$$

ist.

Mathematiker beginnen an dieser Stelle berechtigterweise damit, über die Existenz dieses Limes nachzudenken. Wir formen  $y_m$  noch etwas um, indem wir

$$\left(1 + \alpha \frac{T}{m}\right)^m = \left(1 + \alpha \frac{T}{m}\right)^{(m/\alpha T) \cdot (\alpha T)} = \left[\left(1 + \alpha \frac{T}{m}\right)^{m/\alpha T}\right]^{\alpha T} \quad (75)$$

schreiben und kümmern uns um die Berechnung der inneren Klammer, also um die Berechnung von

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = ?, \quad \text{mit} \quad \left(n = \frac{m}{\alpha T}\right). \quad (76)$$

Wie kann man diesen Ausdruck berechnen? Wie groß muss  $n$  werden, damit man den Ausdruck hinreichend genau bekommt. Dabei ist klar, dass der Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  auch mit Rechenmaschinen schwer durchzuführen ist. Ein analytischer Zugang für den Grenzübergang ist daher sehr nützlich.

Erinnern wir uns hierzu an die Binomischen Formeln aus der Schule:  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ . Diese Gesetze sind auch für die  $n$ -te Potenz dieses Binoms erweiterbar, wie dies auch im Abschnitt 3.6 näher erläutert wird. Hier verwenden wir das Ergebnis

$$(a + b)^n = a^n b^0 + n a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 \\ \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \binom{n}{n} a^0 b^n, \quad (77)$$

um den Ausdruck (76) umzuformen. Die Klammern sind dabei eine Abkürzung für

$$\binom{n}{k} \equiv \binom{n}{n-k} \equiv \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad (78)$$

(gesprochen "n über k") wobei das Symbol  $n!$  für das Produkt von  $n$  Zahlen

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

steht und **Fakultät** genannt wird. Die Fakultät ist eine sehr schnell wachsende Funktion:  $2! = 2$ ,  $3! = 6$ ,  $4! = 24$ ,  $5! = 120$ ,  $6! = 720$ ,  $7! = 5040$ ,  $8! = 40320$ ,  $9! = 362880$ ,  $10! = 3628800$ ,  $\dots$ . Mit der Stirling-Formel wird im Abschnitt 6.15 eine sehr nützliche Näherungsformel für die Fakultät berechnet.<sup>1</sup>

Setzen wir nun die Formel (77) ein und formen den Ausdruck (76) wie folgt um

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \frac{1}{n^3} + \dots \\ \text{und} \quad \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!}, \\ \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} \frac{1}{n} \frac{1}{n} = \frac{(n)!}{2!(n)!} \frac{(n-1)}{n} \frac{(n)}{n} \\ = \frac{1}{2!} \left(\frac{n-1}{n}\right) \approx \frac{1}{2!} \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

---

<sup>1</sup>Für große Werte von  $n$  läßt sich  $n!$  aber auch in guter Näherung durch die Stirling-Formel ausdrücken

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \quad (\text{Stirling - Formel}), \quad (79)$$

über deren Herleitung wir im Abschnitt zur Gamma-Funktion nachdenken. Diese Formel ergibt  $10! = 3598697.76838632$  und der relative Fehler ist  $(10! - \sqrt{20\pi} \cdot 10^{10} \cdot e^{-10})/10! \sim 0.0083$ , also bereits bei  $n = 10$  kleiner als 1%.

$$\begin{aligned} \binom{n}{3} \frac{1}{n^3} &= \frac{n!}{3!(n-3)!} \frac{1}{n^3} = \frac{(n-3)!}{3!(n-3)!} \frac{(n-2)(n-1)n}{n \cdot n \cdot n} \\ &\approx \frac{1}{3!} \quad \text{für } n \rightarrow \infty \\ &\text{usw.} \end{aligned} \tag{80}$$

Der gesuchte Ausdruck in Gleichung (76) kann also durch eine Reihe, die sogenannte Exponentialreihe, ausgedrückt werden, mit  $0! = 1$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e = 2.7182818\dots, \tag{81}$$

wobei  $e$  eine feste und hierdurch definierte Zahl ist. (Vorsicht: Wir haben in (80) überall Reste asymptotisch unter den Tisch fallen lassen. Eigentlich müssten wir noch prüfen, ob diese nicht in der letzten Formel noch zu Korrekturen führen könnten).

·  
(\* \*\_

Nun stellt sich die Frage, bis zu welchem Wert  $n$  man die Exponentialreihe aufsummieren muß, damit der Fehler so klein wie gewünscht wird. Eine Möglichkeit hierzu wäre, für die Reihe einfach ein kleines Computerprogramm zu schreiben und dies bis zu verschiedenen Werten von  $n$  aufzusummieren. Mit der folgenden Abschätzung geht es aber noch schneller. Trennen wir nun die unendliche Reihe in zwei Teile,

$$e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + r_{n+1} \quad \text{mit} \quad r_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}, \tag{82}$$

wobei  $r_{n+1}$  Restglied genannt wird.

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots\right) \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+2}\right)^k = \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1} \rightarrow \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Da  $\frac{1}{n+2} < 1$  gilt, haben wir im vorletzten Schritt das Ergebnis für die geometrische Reihe (70) eingesetzt. Aber man kann hier noch großzügiger sein und in der Reihe  $\frac{1}{n+2}$  durch  $\frac{1}{2}$  ersetzen, weil  $\frac{1}{n+2} < \frac{1}{2}$  ist. Dies führt auf

$$r_{n+1} < \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{(n+1)!}. \tag{83}$$

Nun haben wir eine bequeme Methode zur Berechnung von  $e$  und wir kennen nun auch den Fehler, der z.B. für  $n = 15$

$$r_{16} < \frac{2}{16!} < 10^{-13}$$

beträgt. Sie sehen auch, auf den Faktor 2, der sich durch die unterschiedlichen Abschätzungen ergibt, kommt es gar nicht, weil  $\frac{1}{n+1!}$  so schnell fällt.

Folgende Zahlenbeispiele sollen nochmals verdeutlichen, dass die Exponentialreihe viel schneller konvergiert als der Ausdruck in (76).

n	$S_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$	$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
2	2,5	2.25
4	2,7083333333	2,4414062500
6	2,7180555555	2,5216263717
12	2,7182818282	2,6130352901
$10^5$	-	2,7181459268
$10^7$	-	2,7182816925

..\*\*)

Mit Gl. (75) und  $x = \alpha T$  gilt offensichtlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad (84)$$

und man nennt die  $x$ -te Potenz von  $e$  die **Exponentialfunktion**, wobei ebenso die Schreibweise

$$e^x =: \exp(x),$$

gängig ist.  $e^x$  ist positiv und monoton wachsend wie auch bereits in Abb. 3 zu sehen war.

Kommen wir zum Ausgangsproblem zurück. Wir können die Lösung auch für größere Zeiten berechnen

$$y(T) = e^{\alpha T} y_0, \quad (85)$$

wobei  $y_0$  der Anfangszustand ist. Mit dem bisher Besprochenen und nach der Ersetzung  $1 \rightarrow x$ , sowie der Wiederholung der Rechenschritte folgt nun auch die Reihendarstellung der  $e$ -Funktion.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m &\approx 1 + m \left(\frac{x}{m}\right) + \binom{m}{2} \left(\frac{x}{m}\right)^2 + \binom{m}{3} \left(\frac{x}{m}\right)^3 + \\ &\rightarrow = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x \end{aligned} \quad (86)$$

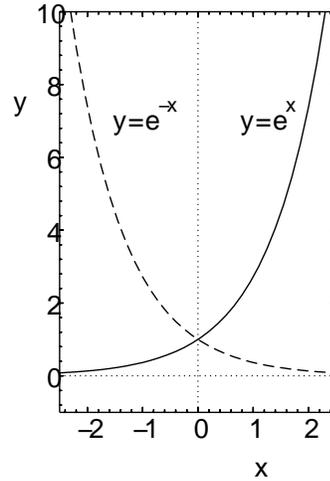


Abbildung 14: Die Funktionen  $e^x$  und  $e^{-x}$ .

### 3.3 Differentialgleichung und e-Funktion

Führen wir nun in Gl. (74) den Grenzprozess  $\Delta t \rightarrow 0$  aus, so folgt die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}y(t) = \alpha y(t). \quad (87)$$

für das Wachsen oder das Schrumpfen einer Population (je nach dem Vorzeichen von  $\alpha$ ), und mit (85) auch

$$\frac{d}{dt}y(t) = \alpha y(t) = \alpha e^{\alpha t} y_0.$$

Setzen wir noch  $\alpha = 1$ , so ergibt sich mit

$$\frac{d}{dt}y(t) = y(t) = e^t y_0.$$

bzw.

$$\boxed{\frac{d}{dt}e^t = e^t}. \quad (88)$$

Die Differentialgleichung (87) heißt linear, weil  $y$  in der Gleichung nur linear vorkommt und z.B. keine Potenz von  $y$  oder eine Wurzel von  $y$ . Es ist eine Differentialgleichung erster Ordnung, da nur die "erste Ableitung" vorkommt. Wie dieses einfache Beispiel bereits zeigt, haben lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten  $e$ -Funktionen als Lösung. Es lassen sich sehr viele Gesetzmäßigkeiten, wenn auch manchmal nur als Näherung, durch lineare Differentialgleichungen beschreiben. Aus diesen Gründen ist die  $e$ -Funktion ein ständiger Begleiter.

Für beliebige Werte von  $\alpha$  finden wir

$$\frac{d}{dt}e^{\alpha t} = \alpha e^{\alpha t}. \quad (89)$$

und für die  $n$ -malige Ableitung der  $e$ -Funktion sogar

$$\boxed{\frac{d^n}{dt^n} e^{\alpha t} = \alpha^n e^{\alpha t}}. \quad (90)$$

### 3.4 Einige Rechenregeln für die $e$ -Funktion

Für eine reelle Zahl  $u$  gilt mit natürlichen Zahlen  $n_1$  und  $n_2$  als Exponenten

$$u^{n_1} u^{n_2} = u^{n_1+n_2}. \quad (91)$$

Wieder ein Beispiel zur Erinnerung:  $2^3 \cdot 2^2 = 8 \cdot 4 = 32$  bzw.  $2^3 \cdot 2^2 = 2^{(2+3)} = 2^5 = 32$ . Dies gilt für die Zahl  $e$  ebenso und zwar auch für beliebige reelle Zahlen  $x, y$  im Exponenten

$$\boxed{\exp(x) \exp(y) = \exp(x+y)}. \quad (92)$$

Werden also zwei  $e$ -Funktionen miteinander multipliziert, so addieren sich die Argumente und man erhält  $\exp(x+y)$ .  $f(x) = e^x$  erfüllt die Bedingung  $f' = f$ . Aber auch  $f(x) = e^{x+y}$  erfüllt die Bedingung  $f' = f$ , allerdings jetzt mit der Anfangsbedingung  $f(0) = c(y) = e^y$  bei  $x = 0$  und damit gilt für alle Werte von  $x$  die Relation  $e^{x+y} = c(y)e^x = e^y e^x$ .

Hiermit kann man auch sofort folgende nützliche Regel schließen

$$\boxed{\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}} \quad (93)$$

und ebenso

$$(e^x)^n = e^x \cdot e^x \cdot \dots \cdot e^x = e^{nx}. \quad (94)$$

Letzteres gilt nicht nur für natürliche Zahlen, sondern ebenso für reelle Zahlen  $r$  im Exponenten

$$\boxed{(\exp(x))^r = (e^x)^r = e^{rx} = \exp(rx)} \quad (95)$$

### 3.5 Der natürliche Logarithmus

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion  $x = e^y$  heißt natürlicher Logarithmus und definitionsgemäss sind die beiden Gleichungen

$$\boxed{x = e^y \quad \text{und} \quad y = \ln x} \quad (96)$$

zueinander äquivalent. Entsprechend gilt  $x = e^y = e^{\ln x}$ , d.h.  $e^{\ln}$  ist die Identität. Mit der Identität

$$e^{\ln(xy)} = xy = e^{\ln(x)} \cdot e^{\ln(y)} = e^{\ln x + \ln y} \quad (97)$$

folgt noch eine wichtige Rechenregel

$$\boxed{\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)}. \quad (98)$$

·  
(\*\*\_



Dies legt nun folgende Rekursion nahe

$$\begin{aligned}
 B_0(0) &= 1 \\
 B_1(0) &= 0 \\
 B_0(n) &= 1 \\
 B_0(n) + B_1(n) &= B_1(n+1) \\
 B_1(n) + B_2(n) &= B_2(n+1) \\
 &\dots = \dots \\
 B_n(n) &= B_{n+1}(n+1) \quad , \tag{100}
 \end{aligned}$$

d.h. die Reihenentwicklung von  $(a+b)^{n+1}$  folgt aus derjenigen von  $(a+b)^n$ , wobei zwischen den Binomialkoeffizienten beider Reihen die Beziehungen der entsprechenden Zeilen des Pascalschen Zahlendreiecks bestehen.

Danach kann nun die Reihe

$$(a+b)^n = \sum_{\nu=0}^n B_\nu(n) a^{n-\nu} b^\nu \tag{101}$$

mit den Beziehungen  $B_0(n) = B_n(n) = 1$  und  $B_\nu(n) + B_{\nu+1}(n) = B_{\nu+1}(n+1)$  für  $\nu = 0, 1, \dots, n-1$  aufgebaut werden. Wünschenswert ist jetzt noch ein expliziter Ausdruck für  $B_\nu(n)$ . Gehen wir hierzu entlang des Pascal'schen Dreiecks von rechts oben schräg nach links unten.

$$\begin{aligned}
 B_1(2) &= 2 \quad ; \quad B_1(3) = 3; \dots B_1(n) = n \\
 B_2(2) &= 1 \quad ; \quad B_2(3) = 3 = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2}; B_2(4) = 6 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}; B_2(5) = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \\
 B_3(6) &= 20 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}
 \end{aligned}$$

Oder allgemein:

$$B_\nu(n) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-\nu+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \nu} \quad \nu = 1, 2, \dots, n \quad . \tag{102}$$

Von der Gültigkeit für  $(a+b)$  und  $(a+b)^2$  haben wir uns bereits überzeugt.  $B_\nu(n+1)$  muß nun von gleicher Struktur sein nur  $n \rightarrow n+1$  ist zu ersetzen. Überzeugen wir uns davon mit der Regel (101).

$$\begin{aligned}
 B_\nu(n+1) &= B_{\nu-1}(n) + B_\nu(n) = \frac{n(n-1)\dots(n-\nu+2)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (\nu-1)} + \frac{n(n-1)\dots(n-\nu+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \nu} \\
 &= \frac{n(n-1)\dots(n-\nu+2)(\nu+n-\nu+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \nu} \\
 &= \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n+1-\nu+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \nu}
 \end{aligned}$$

Die Formel  $B_\nu(n+1)$  hat wieder die gleiche Struktur. Seit Euler hat sich für die Binomialkoeffizienten  $B_\nu(n)$  die Schreibweise  $\binom{n}{\nu}$  (lies: "n über nu") eingebürgert. Das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen bezeichnet man mit  $n!$  (lies: "n Fakultät"). Es gelten demnach folgende Definitionsformeln:

$$\boxed{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot n = n!}$$

sowie

$$\binom{n}{\nu} = \begin{cases} 1 & \text{für } \nu = 0 \\ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-\nu+1)}{\nu!} & \text{für } \nu = 1, 2, \dots, n \end{cases} .$$

Unter Berücksichtigung der symbolischen Schreibweise hat der binomische Lehrsatz die Gestalt.

$$\boxed{(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} a^{n-\nu} b^\nu} \quad (103)$$

·  
\_\*\*)

## 4 Komplexe Zahlen und weitere elementare Funktionen

Die Wurzeln wie  $\sqrt{4} = 2$  oder  $\sqrt{2} = 1.4142\dots$  sind sicherlich schon bekannt. **Aber was machen wir mit scheinbar sehr einfachen Gleichungen wie  $x^2 + 1 = 0$ ?** Um mit derartigen Problemen umzugehen, sind komplexe Zahlen der Ausweg. Komplexe Zahlen erlauben seit dem 16. Jahrhundert in Analysis und Algebra eine große Vereinfachungen. Der wahre Wert solcher Zahlen liegt auch darin, dass durch sie ganz verschiedene Teile der Mathematik miteinander in Verbindung gesetzt werden. Eine berühmte Relation ist die Euler-Beziehung

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x,} \quad (104)$$

durch welche auf einen Schlag Zusammenhänge zwischen scheinbar ganz verschiedenen Funktionen aufgedeckt werden. Die volle Entfaltung findet diese Idee in der Funktionentheorie, in der die Funktionen von komplexen Zahlen abhängen.

Komplexe Zahlen, wie wir sie hier behandeln, sind auch nicht kompliziert. Sie sind am Anfang nur etwas ungewohnt.

### 4.1 Wo treten komplexe Zahlen auf?

Obwohl komplexe Zahlen in sehr vielen Bereichen auftreten, begegnen sie uns am natürlichsten wie oben als Lösung von Polynomen. Polynome treten laufend bei der Berechnung von Eigenwerten von Matrizen auf. Im Abschnitt 11 bei den  $2 \times 2$  Matrizen werden wir ein einfaches quadratisches Polynom antreffen

$$z^2 - bz + c = 0 \quad (105)$$

welches die beiden Lösungen

$$\boxed{z_{1/2} = \frac{1}{2} \left[ b \pm \sqrt{b^2 - 4c} \right].} \quad (106)$$

besitzt, die wahrscheinlich aus der Schule noch bekannt sind.<sup>2</sup> Wenn der Ausdruck unter der Wurzel positiv ist, also  $b^2 - 4c > 0$  gilt, so sind die beiden Lösungen reelle Zahlen. Für  $b^2 - 4c < 0$  steht man allerdings wieder wie oben vor dem Problem, was die Wurzel einer negativen Zahl ist.

Um mit diesem Problem fertig zu werden, wird die imaginäre Einheit  $i$  eingeführt.

$$\boxed{\sqrt{-1} = +i \quad \text{bzw.} \quad i^2 = -1.} \quad (107)$$

---

<sup>2</sup>Zur Erinnerung:  $z^2 - bz + c = 0$ . Dies kann umgeschrieben werden in  $(z - b/2)^2 + c - b^2/4 = 0$  bzw.  $(z - b/2)^2 = b^2/4 - c$ . Zieht man daraus die Wurzel, so folgt  $z - b/2 = \pm \sqrt{b^2/4 - c}$  bzw.  $z = b/2 \pm \sqrt{b^2/4 - c}$ , womit die sehr oft benötigte Regel (106) nochmals kurz nachgerechnet ist.

Diese imaginäre Einheit  $i$  ist also einfach die Zahl, die mit sich selbst multipliziert den Wert  $-1$  annimmt. Eine Zahl  $z = i * 2$  ergibt also quadriert einfach  $-4$ . In vielen Ingenieurbüchern schreibt man auch oft  $\sqrt{-1} = j$ , weil dort  $i$  als Symbol für den Strom verwendet wird. Mit dieser Vereinbarung läßt sich nun auch für  $b^2 - 4c < 0$  eine Lösung angeben

$$z_{1/2} = \frac{1}{2} \left[ b \pm i\sqrt{4c - b^2} \right]. \quad (108)$$

Ganz allgemein schreiben wir komplexe Zahlen in der Form

$$\boxed{z = x + iy}, \quad (109)$$

wobei wir im speziellen Beispiel die Abkürzungen  $x = b/2$  und  $y = \pm\sqrt{4c - b^2} / 2$  eingeführt haben.

Verdeutlichen wir uns nochmals mit dem Zahlenbeispiel  $b = 4$  und  $c = 5$  in Abb. 15, was das eigentliche Problem ist. Dort ist die Funktion  $f(z)$

$$f(z) = z^2 - 4z + 5$$

für reelle Werte von  $z = x$  gezeigt und man sieht, dass  $f(x)$  keine Nullstelle besitzt.

·  
(\*\*\_

Dasselbe Polynom kann sich aber z.B. auch bei der Berechnung der Schwingungsfrequenz (auch Eigenfrequenz) eines Pendels oder eines elektrischen Schwingkreises, aber bei auch der sogenannten Stabilitätsanalyse nichtlinearer und chaotischer Systeme (z.B. bei der Analyse des Räuber-Beute Verhalten von Luchs und Schneehase etc.) und vielen anderen Problemen ergeben. Dort wird man bei der Untersuchung dieser Fragestellung auf die Berechnung einer Determinante einer Matrix  $A$  geführt (siehe Kap. 2.3), die selbst wieder verschwinden soll: Also  $D = \det(\mathcal{A}) = 0$  ist gefragt. Nehmen wir ein Beispiel für eine Matrix wie sie typischerweise bei derartigen Fragestellungen auftritt

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} z - 2 & 1 \\ -1 & z - 2 \end{pmatrix}, \quad (110)$$

dann führt die Bedingung  $D = \det(\mathcal{A}) = 0$  auf

$$D = (z - 2)^2 + 1 = z^2 - 4z + 5 = 0. \quad (111)$$

Während wir bei der Funktion  $f(x)$  evtl. damit leben können, dass diese keine Nullstelle hat, sind wir bei der Berechnung der Schwingungsfrequenz eines Schwingkreises etc. darauf angewiesen, dass Polynome wie in (111) eine Lösung haben.

-.\*\*) )

Der Fundamentalsatz der Algebra sagt uns, dass ein Polynom wie in Gl. (105) oder in Gl. (111) immer eine Lösung hat, nur ist diese manchmal komplex. Ist das Polynom von Grade 3 und höher, also vom Grade  $n$ , so sagt uns der Fundamentalsatz, dass es  $n$  Lösungen gibt. Im speziellen Beispiel hat das Polynom  $z^2 - 4z + 5 = 0$  die Lösungen  $z_{1/2} = 2 \pm \sqrt{16 - 20}/2 = 2 \pm i$ .

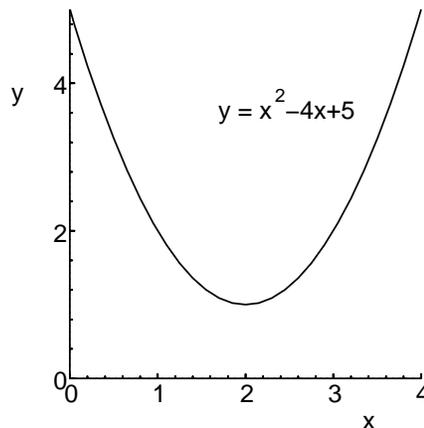


Abbildung 15: Die Funktion  $f(x) = x^2 - 4x + 5$

Wenden wir uns nun den elementaren Rechenregeln komplexer Zahlen zu.

## 4.2 Die vier Grundrechnungsarten mit komplexen Zahlen

### 4.2.1 Addition und Subtraktion

Wir nennen  $\operatorname{Re}(z)$  den Realteil von  $z$ ,  $\operatorname{Im}(z)$  den entsprechenden Imaginärteil, so dass also gilt:  $z \equiv \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$ .

Die Addition zweier komplexer Zahlen  $z_1$  und  $z_2$  ergibt im allgemeinen wieder eine komplexe Zahl. Dabei werden die Realteile  $x_i$  und die Imaginärteile  $y_i$  separat addiert.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad . \quad (112)$$

Dies hat eine gewisse Ähnlichkeit zu Vektoren, wo die Addition komponentenweise ausgeführt wird. Man kann sich auch sofort überzeugen, dass aus der Gültigkeit des Assoziativ- und Kommutativgesetzes für die Addition reeller Zahlen, diese Gesetze ebenso für Komplexe Zahlen folgen.

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad (\text{Kommutativgesetz}) \quad (113)$$

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \quad (\text{Assoziativgesetz}) \quad (114)$$

Es ist also egal, in welcher Reihenfolge komplexe Zahlen addiert werden.

### 4.2.2 Multiplikation

Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen ergibt gewöhnlich auch wieder eine komplexe Zahl. Das Produkt wird erhalten, indem man alles "ausmultipliziert" und sich daran erinnert, dass  $i^2 = -1$  gilt.

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= x_1 x_2 + ix_1 y_2 + iy_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)\end{aligned}\tag{115}$$

Beispiel: Das Produkt der beiden Zahl  $z_1 = 3 + 2i$  und  $z_2 = -1 - 4i$  ist

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= (3 + 2i)(-1 - 4i) \\ &= -3 - 2i - 12i - 8i^2 \\ &= 5 - 14i\end{aligned}$$

Wie für reelle Zahlen, so gelten auch für die Multiplikation komplexer Zahlen die Kommutativ- und Assoziativgesetze

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= z_2 z_1 \quad , \\ (z_1 z_2) z_3 &= z_1 (z_2 z_3) \quad .\end{aligned}\tag{116}$$

Für das Produkt komplexer Zahlen gilt auch noch

$$\begin{aligned}|z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2| \quad , \\ \arg(z_1 z_2) &= \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad ,\end{aligned}\tag{117}$$

wozu die Erklärung im Abschnitt 4.6 geliefert wird.

### 4.2.3 Division

Der Quotient zweier komplexer Zahlen ist

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \quad .$$

Dies möchte man natürlich wieder in der Form  $z_3 = \operatorname{Re}(z_3) + i\operatorname{Im}(z_3)$  darstellen und erweitert hierfür einfach den Quotienten mit  $(x_2 - iy_2)$ .

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}\end{aligned}\tag{118}$$

### 4.3 Komplex konjugierte Zahl

Zur einer komplexen Zahl  $z = x + iy$  gibt es auch noch eine komplex konjugierte Zahl  $z^* = x - iy$  .

**Beispiel:**  $z = a + 2i + 3ib$ . Dies kann man umschreiben

$$z = a + i(2 + 3b)$$

und nun braucht man nur  $i$  durch  $-i$  zu ersetzen und wir erhalten die komplex konjugierte Zahl  $z^*$

$$z^* = a - i(2 + 3b)$$

Es folgen damit auch sofort einige nützliche Rechenregeln.

$\begin{aligned}(z^*)^* &= z \\ z + z^* &= 2 \operatorname{Re}(z) = 2x \\ z - z^* &= 2i \operatorname{Im}(z) = 2iy\end{aligned}\quad (119)$
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

### 4.4 Betrag und Argument komplexer Zahlen

Da jede komplexe Zahl  $z = x + iy$  als geordnetes Paar reeller Zahlen betrachtet werden kann, lassen sich solche Zahlen durch Punkte in der  $xy$ -Ebene, der sogenannten *komplexen Ebene* (Argand Diagramm), darstellen. Eine komplexe Zahl die z.B. durch den Punkt  $P = (3, 4)$  in der  $xy$ -Ebene repräsentiert wird, kann daher als  $(3, 4)$  oder  $3 + 4i$  gelesen werden. Für jede komplexe Zahl gibt es genau einen Punkt in der Ebene, und umgekehrt entspricht jedem Punkt der Ebene genau eine komplexe Zahl. Aus diesem Grund werden wir anstelle von der komplexen Zahl  $z$  auch oft vom *Punkt*  $z$  sprechen. Manchmal bezeichnet man die  $x$  und  $y$ -Achse als *reelle* bzw. *imaginäre* Achse und die komplexe Ebene als  $z$ -Ebene. Man schreibt für den Real- und den Imaginärteil auch

$$x = \operatorname{Re}(z) \quad \text{und} \quad y = \operatorname{Im}(z) \quad (120)$$

Der Abstand des Punktes  $(x, y)$  vom Ursprung  $(0, 0)$  entspricht der Länge des Vektors  $\vec{r} = (x, y)$ , was wir als den Betrag der komplexen Zahl interpretieren.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (121)$$

oder anders geschrieben

$$|z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{(x + iy)(x - iy)} \quad (122)$$

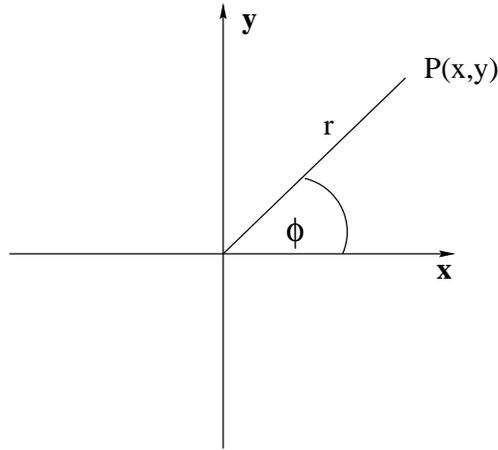


Abbildung 16: Punkt  $P(x, y)$  in der komplexen Ebene

Mit dem Argument einer komplexen Zahl  $\arg(z)$  wird der Winkel  $\theta = \arg z$  in Abbildung 16 bezeichnet

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad (123)$$

und durch Konvention wird dieser Winkel entgegen des Uhrzeigersinnes positiv gewählt.

Beispiel:  $z = 2 - 3i$ ; Der Betrag davon ist

$$|z| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

und sein Argument ist

$$\arg(z) = \arctan\left(-\frac{3}{2}\right) \sim -56,3^\circ = -0.98279$$

## 4.5 Komplexe Zahlen und die e-Funktion

Nachdem wir mit der Wurzel einer negativen Zahl  $\sqrt{-1} = i$  umzugehen gelernt haben, stellt sich die Frage, was machen wir mit

$$\sqrt{i} = ?$$

und ähnlichen Ausdrücken? Hierfür wird sich die  $e$ -Funktion mit der komplexen Zahl im Argument der Logarithmus als nützlich erweisen.

Daher ist es an dieser Stelle ganz nützlich, dass wir bisher bei der  $e$ -Funktion  $e^x$  noch wenig über das Argument  $x$  angenommen haben. Die Reihendarstellung (86) gilt nämlich auch für komplexe Zahlen

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}. \quad (124)$$

## 4.6 Die Polardarstellung komplexer Zahlen

Im folgenden wählen wir  $w = i\phi$  mit der reellen Variablen  $\phi$ . In diesen Fall ist dann  $w$  rein imaginär und  $\exp(w) = \exp(i\phi)$ . Wir nutzen nun die Reihendarstellung (124) der  $e$ -Funktion aus und schreiben davon die ersten Summanden hin

$$\begin{aligned} e^{i\phi} &= 1 + \frac{i}{1!}\phi + \frac{i^2}{2!}\phi^2 + \frac{i^3}{3!}\phi^3 + \dots \quad , \\ e^{-i\phi} &= 1 - \frac{i}{1!}\phi + \frac{i^2}{2!}\phi^2 - \frac{i^3}{3!}\phi^3 + \dots \quad . \end{aligned} \quad (125)$$

Nutzen wir noch die Regel  $i^2 = -1$ , so bekommen wir

$$\begin{aligned} e^{i\phi} + e^{-i\phi} &= 2\left(1 + \frac{i^2}{2!}\phi^2 + \frac{i^4}{4!}\phi^4 + \dots\right) \\ &= 2\left(1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} + \dots\right) = REELL! \end{aligned} \quad (126)$$

Offensichtlich sind für reelles  $\phi$  die komplexen Zahlen  $z = e^{i\phi}$  und  $e^{-i\phi}$  konjugiert komplex zueinander, also  $z^* = (e^{i\phi})^* = e^{-i\phi}$ . Demzufolge gilt

$$\begin{aligned} z + z^* &= e^{i\phi} + e^{-i\phi} = 2 \operatorname{Re}\{e^{i\phi}\} \\ z - z^* &= e^{i\phi} - e^{-i\phi} = 2 \operatorname{Im}\{e^{i\phi}\} \quad (\phi \text{ reell}) \end{aligned} \quad (127)$$

Für den Betrag von  $e^{i\phi}$  folgt mit der Regel (121)

$$|z|^2 = |e^{i\phi}|^2 = zz^* = e^{i\phi}e^{-i\phi} = e^{i\phi-i\phi} = e^0 = 1$$

Offensichtlich beschreibt  $z = e^{i\phi}$  für variierendes reelles  $\phi$  einen **Kreis mit Radius 1** in der komplexen Ebene!!

Mit  $z = x + iy = e^{i\phi}$  sieht man der Abb.16 mit  $x = \cos \phi$  und  $y = \sin \phi$  sofort die berühmte Eulersche Formel an

$$\boxed{\cos \phi + i \sin \phi = e^{i\phi}}. \quad (128)$$

Hier sieht man nun auch, dass es sich z.B. für  $z = i\phi = i\omega t$  bei  $e^{i\omega t}$  um eine Schwingung handelt. Die  $e$ -Funktion in dieser Schreibweise ist daher bei der Untersuchung schwingender Systeme unentbehrlich.

Insbesondere sind nun auch die Beispiele

$$e^{i\pi} = -1, \quad e^{i\pi/2} = i \quad \text{und} \quad e^{i0} = e^{i2\pi} = 1$$

unmittelbar einsichtig. Mit der Darstellung (128) kann man auch leicht die folgende wichtige Relation ableiten

$$\begin{aligned} 1 = |z|^2 &= (\cos \phi + i \sin \phi)(\cos \phi - i \sin \phi) \\ &= \cos^2 + \sin^2 \phi = 1 \quad . \end{aligned}$$

Insgesamt läßt sich sogar jede komplexe Zahl in dieser sogenannten **Polardarstellung**

$$z = R e^{i\phi} \quad (R \quad \text{und} \quad \phi \quad \text{reell})$$

schreiben. Das Argument  $\arg(z) = \phi$  ist in dieser Darstellung trivial.

(\*\*)

## 4.7 Multiplikation und Division in Polarform

Die Multiplikation und Division komplexer Zahlen wird in Polardarstellung ausgesprochen einfach. Das Produkt der komplexen Zahlen  $z_1 = R_1 e^{i\phi_1}$  und  $z_2 = R_2 e^{i\phi_2}$  ist mit den Regeln für die e-Funktion (92)

$$z_1 z_2 = R_1 e^{i\phi_1} R_2 e^{i\phi_2} = R_1 R_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)} \quad . \quad (129)$$

Daraus folgen auch unmittelbar  $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$  und  $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ . Insbesondere ist nun die Division komplexer Zahlen in Polardarstellung sehr einfach

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1 e^{i\phi_1}}{R_2 e^{i\phi_2}} = \frac{R_1}{R_2} e^{i\phi_1} e^{-i\phi_2} = \frac{R_1}{R_2} e^{i(\phi_1 - \phi_2)} \quad . \quad (130)$$

Die Beziehungen  $|z_1/z_2| = |z_1| / |z_2|$  und  $\arg(z_1/z_2) = \arg z_1 - \arg z_2$  folgen.

(\*\*)

## 4.8 de Moivre's Theorem

Ein recht wichtiges Theorem für sin und cos folgt aus der einfachen Identität  $(e^{i\phi})^n = e^{in\phi}$ . Schreibt man dies in der sin und cos Darstellung, so ist dies äquivalent mit

$$\boxed{(\cos \phi + i \sin \phi)^n = (e^{i\phi})^n = e^{in\phi} = \cos(n\phi) + i \sin(n\phi)} \quad , \quad (131)$$

was als de Moivre's Theorem bekannt ist.

## 4.9 Trigonometrische Funktionen

Diese von nun an bekannte Verwandtschaft zwischen der e-Funktion und den trigonometrischen Funktion werden uns auf Schritt und Tritt durch ein Naturwissenschaftler- oder Ingenieurleben begleiten. Moivre's Theorem läßt sich vorzüglich benutzen, um eine

Reihe von Beziehungen für trigonometrische Funktionen abzuleiten und zu berechnen. Beginnen wir mit den komplexen Darstellungen von sin und cos

$$\begin{aligned}\cos \phi &= \frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) \quad , \\ \sin \phi &= \frac{1}{2i}(e^{i\phi} - e^{-i\phi}) \quad ,\end{aligned}\tag{132}$$

welche unmittelbar aus (128) und (127) folgen. Entsprechend folgt auch für tan und cot eine Exponentialdarstellung.

$$\begin{aligned}\tan \phi &= \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{1}{i} \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{e^{i\phi} + e^{-i\phi}} \quad , \\ \cot \phi &= \frac{\cos \phi}{\sin \phi} = i \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{e^{i\phi} - e^{-i\phi}} \quad .\end{aligned}\tag{133}$$

Mit dieser Identifikation liegt mit Hilfe von Gl. (127) auch eine Reihendarstellung des  $\cos(x)$  vor. Ersetzt man nun  $\phi = n\Theta$ , so folgt auch für den  $n$ -fachen Winkel  $\Theta$  zusammen mit  $z = e^{i\Theta}$

$$\begin{aligned}\cos(n\Theta) &= \frac{1}{2}(e^{in\Theta} + e^{-in\Theta}) = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) \\ \sin(n\Theta) &= \frac{1}{2i}(e^{in\Theta} - e^{-in\Theta}) = \frac{1}{2i}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)\end{aligned}\tag{134}$$

**Anwendungsprobleme Beispiel 1)** Betrachten wir einen **Verstärker** mit einem Input-Signal  $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$  und der Eigenschaft, dass der Output mit dem Input wie folgt zusammenhängt

$$y(t) = x + Bx^2 = x_0 \cos(\omega t) + Bx_0^2 \cos^2(\omega t)\tag{135}$$

Um daran zu erkennen, welche Frequenzen im Output sind, muss man z.B. ausrechnen wie  $\cos^2(\omega t)$  mit der ursprünglichen Frequenz zusammen hängt. An der  $e$ - Funktionsdarstellung (131) sehen wir sofort, dass durch die Quadrierung eine Frequenzverdopplung auftritt. Solche Oberfrequenzen führen als Ton-Verzerrungen zum sog. *Klirrfaktor* eines Verstärkers. Das Input- und Outputsignal ist für ein Zahlenbeispiel in Abb. 17 gezeigt.

·  
(\*\*\_

**Beispiel 2)** Überlagerung zweier Schwingungen gleicher Frequenz, welche gegeneinander phasenverschoben sind.

$$f(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

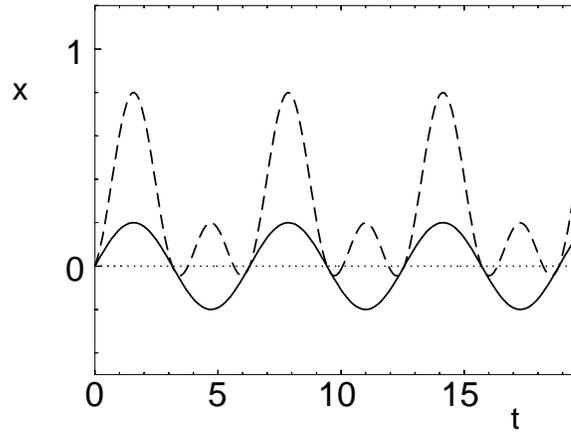


Abbildung 17: Modellverstärker für den Input  $x(t) = 0.2 \sin(t)$  (durchgezogene Linie) und dem Output  $y(t) = 0.3 \sin(t) + 0.5 \sin^2(t)$ . Ähnliches Verhalten zeigen auch nicht-lineare optische Frequenzverdoppler.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2i} \left[ A_1 \left( e^{i(\omega t + \varphi_1)} - e^{-i(\omega t + \varphi_1)} \right) + A_2 \left( e^{i(\omega t + \varphi_2)} - e^{-i(\omega t + \varphi_2)} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2i} e^{i(\omega t + \varphi_1)} \left( A_1 + A_2 e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} \right) - \frac{1}{2i} e^{-i(\omega t + \varphi_1)} \left( A_1 + A_2 e^{-i(\varphi_2 - \varphi_1)} \right) \\
 &= \frac{1}{2i} e^{i(\omega t + \varphi_1)} \left( A_1 + A_2 e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} \right) + \text{konj. komplex}
 \end{aligned}$$

Nun kann man den Vorfaktor umschreiben und man erhält mit

$$\left( A_1 + A_2 e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} \right) = A e^{i\varphi} \quad (136)$$

wieder eine komplexe Zahl  $A \exp(i\varphi)$ , die sich leicht mit den bisherigen Regeln berechnen läßt. Das Endsignal hat die gleiche Frequenz und hat nur eine andere Amplitude und ist phasenverschoben

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi_1 + \varphi). \quad (137)$$

**Beispiel 3)** Ein anderes Problem mit starken Konsequenzen tritt auf, wenn man zwei Schwingungen mit zwei leicht verstimmtten Frequenzen überlagert, wie

$$f(t) = A_1 \cos((\omega + \Delta\omega)t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (138)$$

Das Resultat ist eine Schwebung. In der Akustik ist dieses Phänomen gut hörbar. Für spezielle Zahlenbeispiele ist die Schwebung im Bild 18 gezeigt.

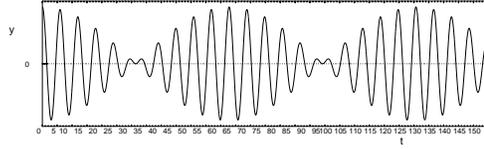


Abbildung 18: Eine Überlagerung zweier leicht verstimelter Schwingungen ist gezeigt  $y = \cos(x) + \cos(1.1x)$  führen zu einer Schwebung.

Was ist z.B. mit Winkelsummen  $\sin(x + y)$ , die einem ständig über den Weg laufen? Diese lassen sich mit (132) auch in Produkte von  $\sin$  und  $\cos$  umschreiben. Hierfür ist die Exponentialdarstellung und die Euler Formel (128) besonders hilfreich.

$$\sin(x + y) = \frac{1}{2i} \left( e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)} \right) \quad (139)$$

Von  $\exp(i(x + y))$  brauchen wir nur den Imaginärteil und zur Umformung dieses Ausdruckes verwenden wir die Produktregel für Exponentialfunktionen und die Euler-Formel (128)

$$\begin{aligned} e^{i(x+y)} &= e^{ix} e^{iy} = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= i(\sin x \cos y + \cos x \sin y) + \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{aligned} \quad (140)$$

Subtrahieren wir hiervon noch  $\exp(-i(x + y))$  so bleibt nur der Imaginärteil übrig. Insgesamt bekommen wir dadurch

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad (141)$$

Oder man steht vor dem Problem  $\sin 3\Theta$  und  $\cos 3\Theta$  durch Potenzen von  $\cos \Theta$  und  $\sin \Theta$  auszudrücken. Nutzen wir hierzu de Moivre's Theorem.

$$\cos 3\Theta + i \sin 3\Theta = (\cos \Theta + i \sin \Theta)^3 = (\cos^3 \Theta - 3 \cos \Theta \sin^2 \Theta) + i(3 \sin \Theta \cos^2 \Theta - \sin^3 \Theta) \quad (142)$$

Vergleichen wir die Real- und Imaginärteile auf beiden Seiten, so bekommen wir

$$\begin{aligned} \cos 3\Theta &= \cos^3 \Theta - 3 \cos \Theta \sin^2 \Theta \\ &= \cos^3 \Theta - 3 \cos \Theta (1 - \cos^2 \Theta) \\ &= 4 \cos^3 \Theta - 3 \cos \Theta \end{aligned} \quad (143)$$

und

$$\begin{aligned} \sin 3\Theta &= 3 \sin \Theta \cos^2 \Theta - \sin^3 \Theta \\ &= 3 \sin \Theta (1 - \sin^2 \Theta) - \sin^3 \Theta \\ &= 3 \sin \Theta - 4 \sin^3 \Theta \end{aligned} \quad (144)$$

Ein weiteres Beispiel ist  $\cos^3 \Theta$ , das wir mit  $z = e^{i\Theta}$  und der Formel (127) leicht berechnen können

$$\begin{aligned}\cos^3 \Theta &= \frac{1}{2^3} \left( z + \frac{1}{z} \right)^3 \\ &= \frac{1}{8} \left( z^3 + 3z + 3\frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left( z^3 + \frac{1}{z^3} \right) + \frac{3}{8} \left( z + \frac{1}{z} \right) \\ &= \frac{1}{4} \cos(3\Theta) + \frac{3}{4} \cos \Theta\end{aligned}\tag{145}$$

Potenzen von  $\sin x$  und  $\cos x$  führen offensichtlich zu höheren harmonischen wie  $\cos(3x)$  und umgekehrt lassen sich höhere harmonische Funktionen durch Potenzen der Grundfrequenz ausdrücken. An dem oben genannten nichtlinearen Verstärker wird dann eine Frequenzmischung deutlich. Auf diese und ähnliche Weise lassen sich eine Reihe weiterer nützlicher Beziehungen ableiten.

## Einige nützliche trigonometrische Umformungen

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \quad (146)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad (147)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad (148)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad (149)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \quad (150)$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad (151)$$

$$\tan x = \sin x / \cos x \quad (152)$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \quad (153)$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 \quad (154)$$

$$\sin(3x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \quad (155)$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad (156)$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \quad (157)$$

$$\sin(x) \cos(y) = \frac{1}{2} \{ \sin(x-y) + \sin(x+y) \} \quad (158)$$

$$\cos(nx) = \cos^n x - \binom{n}{2} \cos^{n-2} x \sin^2 x + \binom{n}{4} \cos^{n-4} x \sin^4 x \dots \quad (159)$$

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \quad ;$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x$$

Weitere Beziehungen findet man in jeder Formelsammlung oder durch "Befragung" einer Computeralgebra.

..\*\*)

### 4.10 Die Suche nach der $n$ -ten Wurzel von "1"

Die Gleichung  $z^2 = 1$  hat die beiden bekannten Lösungen  $z = \pm 1$ . Nachdem uns die komplexen Zahlen bekannt sind, können wir auch alle Lösung von  $z^n = 1$  beschaffen.

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra gibt es für jedes Polynom  $n$ -ten Grades  $n$  Lösungen. Wir wissen auch schon

$$1 = e^{2i\pi k} = \cos(2\pi k) + i \sin(2\pi k), \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (160)$$

Demzufolge können wir schreiben

$$z^n = e^{2ik\pi} \quad (161)$$

oder

$$z = e^{2i\pi k/n} \quad (162)$$

Dies bedeutet, die Lösungen von  $z^n = 1$  sind

$$z_{1,2,\dots,n} = 1, e^{2i\pi/n}, \dots, e^{2i(n-1)\pi/n}, \quad (163)$$

wobei wir hier  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$  verwenden. Größere Werte von  $k$  ergeben keine neuen Lösungen, sondern sind nur eine Duplizierung der vorhandenen Lösungen.

Beispiel: Finde die Lösungen der Gleichung  $z^3 = 1$ .

Wenden wir nun Formel (163) an, so erhalten wir  $z_1 = 2^{0i}$ ,  $z_2 = e^{2i\pi/3}$ ,  $z_3 = e^{4i\pi/3}$ . Wie wir bereits erwarten bekommen wir für  $k = 3$ , also  $z_4 = e^{6i\pi/3} = e^{2i\pi} = 1 = z_1$ , nur eine Wiederholung von  $z_1$ .

## 4.11 Logarithmus

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion  $e^x = y$  ist der Logarithmus

$$x = \ln y \quad (x, y \text{ reell}) \quad (164)$$

Der Funktionsverlauf wurde schon im ersten Abschnitt in Abb. (3) gezeigt.

Der Logarithmus ist auch die Umkehrfunktion der  $e$ -Funktion für komplexe Zahlen. Für den Logarithmus einer komplexen Zahl  $z$  schreiben wir

$$w = \ln z \quad \text{mit} \quad z = e^w \quad (165)$$

Jetzt können wir die Regeln für die  $e$ -Funktion ausnutzen um den Logarithmus eines Produktes komplexer Zahlen

$$z_1 \cdot z_2 = e^{w_1} e^{w_2} = e^{w_1+w_2} \quad (166)$$

zu berechnen

$$\ln(z_1 z_2) = w_1 + w_2 = \ln(z_1) + \ln(z_2) \quad (167)$$

Nehmen wir eine komplexe Zahl auf dem Einheitskreis, so wissen wir bereits

$$z = e^{i\phi} = e^{i(\phi+2\pi k)} \quad (168)$$

Diese Vieldeutigkeit wirkt sich auch auf die komplexe Zahl in Polardarstellung

$$z = r e^{i(\phi+2\pi)} \quad (169)$$

aus und es folgt

$$\ln z = \ln r + i(\phi + 2\pi) \quad . \quad (170)$$

Um die Vieldeutigkeit zu vermeiden, schränkt man das Argument  $\arg(z) = \phi$  auf  $-\pi < \phi \leq \pi$  ein und nennt  $\ln(z)$  bei dieser Einschränkung den Hauptwert.

Beispiel: Was ist  $\ln(-i)$ ?

Hier schreiben wir zuerst  $-i$  in Exponentialform um

$$\ln(-i) = \ln\left(e^{i(-\pi/2+2n\pi)}\right) = i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \quad , \quad (171)$$

mit einer natürlichen Zahl  $n$ . Dies bedeutet  $\ln(-i) = -i\frac{\pi}{2}, 3i\frac{\pi}{2}, \dots$ . Der Hauptwert von  $\ln(z)$  ist  $\ln z = -i\frac{\pi}{2}$ .

Bei einem wichtigen Problem der Physik vieler Teilchen (statistische Physik) steht man vor dem Ausdruck

$$R = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{z^a - 1}{a} =? \quad (172)$$

Auch hier sind  $e$ -Funktion und der Logarithmus sehr hilfreich. Wir wissen bereits  $z = e^{\ln z}$ . Dies bedeutet

$$z^a = (e^{\ln z})^a = e^{a \ln z} \quad . \quad (173)$$

Benutzen wir noch die Reihenentwicklung der  $e$ -Funktion, so bekommen wir für  $R$

$$\begin{aligned} R &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{e^{a \ln z} - 1}{a} = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{a \ln z}{1!} + \frac{a^2 (\ln z)^2}{2!} + \dots - 1}{a} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a \ln z + \frac{a^2 (\ln z)^2}{2!}}{a} \\ &= \ln z \end{aligned} \quad (174)$$

Ähnlich gelagerte Probleme wie  $z^a$  kommen immer wieder vor.

## 4.12 Hyperbolische Funktionen

Was bedeutet eigentlich  $\cos(i\phi)$  oder  $\sin(i\phi)$ ? Mit dieser Wahl eines rein imaginären Argumentes im  $\cos$  und  $\sin$  wird das Argument von  $e$  reell und es folgt eine neue Klasse von Funktionen:

$$\begin{aligned} \cos(i\phi) &= \frac{1}{2}(e^{-\phi} + e^{+\phi}) =: \cosh \phi \quad , \\ -i \sin(i\phi) &= -\frac{1}{2}(e^{-\phi} - e^{+\phi}) =: \sinh \phi \quad . \end{aligned} \quad (175)$$

Die beiden Funktionen  $\cosh \phi$  und  $\sinh \phi$  bezeichnet man "Cosinus Hyperbolicus" oder "Hyperbelcosinus" bzw. "Sinus Hyperbolicus" oder "Hyperbelsinus". Diese hyperbolischen Funktionen sind die komplexen Analoga zu den trigonometrischen Funktionen.

(\*\*\_

Neben den beiden fundamentalen Funktionen gibt es in Analogie zu den trigonometrischen Funktionen die verbleibenden hyperbolischen Funktionen

$$\begin{aligned} \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} , \\ \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} , \\ \operatorname{sech} x &= \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} , \\ \operatorname{cosech} x &= \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} , \end{aligned} \tag{176}$$

Folgende Beziehungen zwischen trigonometrischen und Hyperbelfunktion sind noch ganz hilfreich

$$\begin{aligned} \cosh x &= \cos(ix) \\ i \sinh x &= \sin(ix) \\ \cos x &= \cosh(ix) \\ i \sin x &= \sinh(ix) . \end{aligned} \tag{177}$$

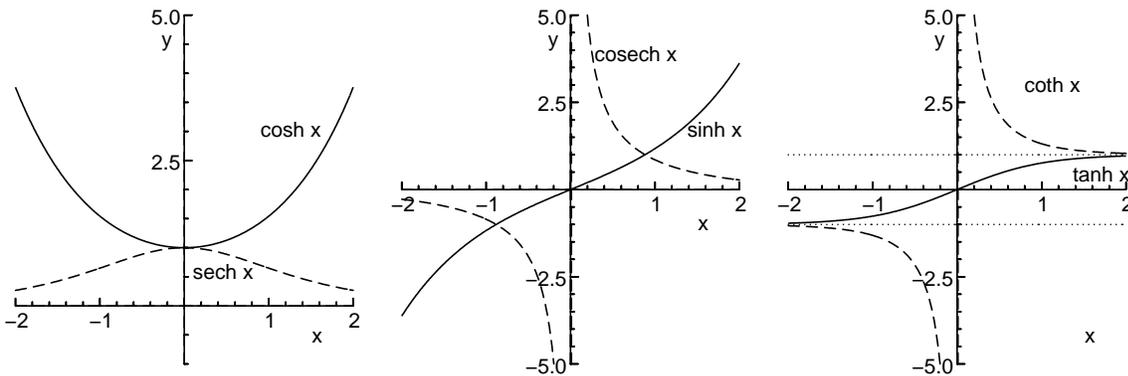


Abbildung 19: Graphen der verschiedenen hyperbolischen Funktion deren analytische Darstellung im Text angegeben ist.

Ähnlich wie die Relationen zwischen verschiedenen trigonometrischen Funktion lassen sich auch Hyperbelfunktionen durch andere Hyperbelfunktionen ausdrücken. Gehen

wir von  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  aus und benutzen (177) so folgt mit  $\cosh^2 x = \cos^2(ix)$  und  $\sinh^2 x = -\sin^2(ix)$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1. \quad (178)$$

Einige andere Identitäten können ebenso abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} \operatorname{sech}^2 x &= 1 - \tanh^2 x \\ \operatorname{cosech}^2 x &= \coth^2 x - 1 \\ \sinh(2x) &= 2 \sinh x \cosh x \\ \cosh(2x) &= \cosh^2 x + \sinh^2 x. \end{aligned} \quad (179)$$

Beispiel: Lösung der Gleichung  $\cosh x - 5 \sinh x - 5 = 0$ . Einsetzen von  $\cosh$  und  $\sinh$  führt auf

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - \frac{5}{2}(e^x - e^{-x}) - 5 &= 0 \\ -2e^x + 3e^{-x} - 5 &= 0 \\ 2e^{2x} + 5e^x - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Dies kann man nun faktorisieren

$$(2e^x - 1)(e^x + 3) = 0$$

Dies bedeutet es gibt 2 Lösungen  $e^x = \frac{1}{2}$  und  $e^x = -3$  bzw.  $x = -\ln 2$  und  $x = \ln(-3) = \ln(e^{i\pi} \cdot 3) = \ln(3) + i\pi$ .

### 4.13 Wo kommen hyperbolische Funktionen vor?

Hyperbolische Lösungen sind keine rein mathematischen Konstrukte und haben vielerlei Anwendungen. So gibt es pulsartige Deformationen auf Wasseroberflächen, sogenannte Solitonen, welche mit einer Geschwindigkeit  $v$  auf der Wasseroberfläche entlang laufen. Diese wurden erstmals von Sir John Scott Russel, einem schottischen Ingenieur, auf einem Kanal beobachtet. Er schrieb

*"I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped - not so the mass of water in the channel which it has put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and*

*beautiful phenomenon ...*”

Der Puls, den er beschrieb, ist eine Lösung der sogenannten Korteweg-de Vries Gleichung. Die ist eine nichtlineare partielle Differentialgleichung, aber eine der Lösungen  $u(x, t)$  dieser Gleichung haben wir soeben kennengelernt.  $u(x, t)$  beschreibt die Deformation der Wasseroberfläche und hat die Form

$$u(x, t) = Av \frac{1}{\cosh^2(x - vt)} = Av \operatorname{sech}^2(x - vt). \quad (180)$$

Dieser Puls hat sein Maximum an der Stelle  $x = vt$ , und er wandert mit der Geschwindigkeit  $v$ .

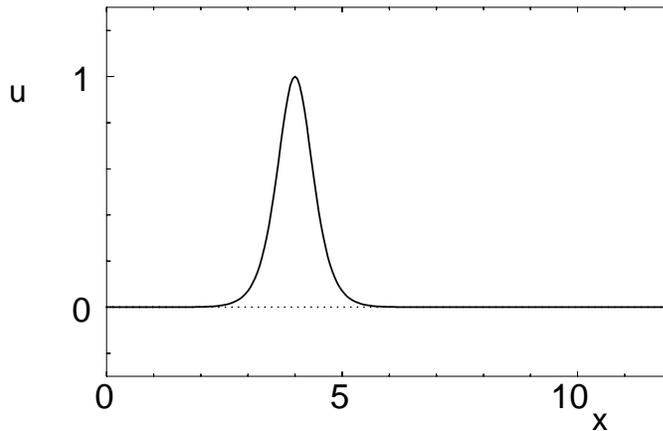


Abbildung 20: Eine Solitonlösung (Pulslösung) die sich nach Gleichung (180) durch eine hyperbolische Funktion darstellen läßt. Hierbei wurde  $Av = 1$  gesetzt und der Zeitpunkt  $t = 4/v$  gewählt.

Ähnliche pulsartige Lösungen sind auch von großer Bedeutung zur Beschreibung von optischen Pulsen in Glasfasern zur Informationsübermittlung.

Der  $\tanh(x)$  beschreibt beispielsweise ein räumliche stufenartige Änderung der Magnetisierung (magnetische Dipolstärke) von  $-M$  bei  $x \ll 0$  zu  $+M$  bei  $x \gg 0$ , siehe Abb. 19, und eine Reihe anderer Probleme. Die Sprungstellen nennt man Domänenwände, deren Dynamik vielerlei praktische Konsequenzen in verschiedenen Materialien hat. Auch bei Selbstorganisationsvorgängen in chemischen, physikalischen und biologischen Systemen tritt der  $\tanh(x)$  immer wieder als eine Lösung auf. Es gibt auch hochinteressante Verallgemeinerungen von  $\tanh$  und  $\operatorname{sech}^2$ , im Rahmen sogenannter Lochlösungen nichtlinearer Gleichungen der Physik.

## 4.14 Hyperbolische Umkehrfunktionen – Areafunktionen

Die Umkehrfunktion von  $y = \sinh(x)$  wird  $\operatorname{arsinh}(y)$  genannt, gesprochen "Area-Sinushyperbolicus", also  $x = \operatorname{arsinh}(y)$ . Dies ist vorerst eine Namensgebung. Wir sind nun an einer Darstellung von  $\operatorname{arsinh}(y)$  interessiert, d.h. wir wollen  $\operatorname{arsinh}(y)$  durch andere bekannte Funktionen ausdrücken.

Hierfür drückt man  $e^x$  durch Linearkombinationen von  $\cosh x$  und  $\sinh x$  aus.

$$e^x = \cosh x + \sinh x \quad (181)$$

Andererseits kennen wir bereits die Beziehung  $\cosh(x) = \pm\sqrt{1 + \sinh^2 x}$  und da  $\cosh(x)$  positiv ist brauchen wir vor der Wurzel nur das positive Vorzeichen zu berücksichtigen. Damit können wir den  $\cosh(x)$  aus der letzten Gleichung eliminieren und erhalten

$$\begin{aligned} e^x &= \sqrt{1 + \sinh^2 x} + \sinh x \\ &= \sqrt{1 + y^2} + y. \end{aligned} \quad (182)$$

Wenden wir auf beide Seiten den Logarithmus an, so folgt der explizite Ausdruck für die Umkehrfunktion

$$x = \operatorname{arsinh}(y) = \ln(\sqrt{1 + y^2} + y). \quad (183)$$

Auf ähnliche Weise erhält man

$$x = \operatorname{arcosh}(y) = \ln(\sqrt{y^2 - 1} + y) \quad |x| > 1 \quad (184)$$

(Siehe Übung). Eine geschlossene Form der Umkehrfunktion von  $\tanh(x)$  nennt man  $\operatorname{artanh}(y)$  und die explizite Form ist

$$x = \operatorname{artanh}(y) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + y}{1 - y} \right) \quad (185)$$

(Übung).

(\*\*\_

## 4.15 Weitere Ableitungsregeln und Ableitungen

Neben einer Reihe von Funktionen sind nun schon eine Reihe von Umkehrfunktionen definiert worden. Die Frage ist, wie läßt sich z.B. die Ableitung der Umkehrfunktion durch die Ableitung der ursprünglichen Funktion ausdrücken.

Beginnen wir wieder mit einem einfachen Beispiel. Zu  $y = f(x) = \frac{1}{2}x - 2$  ist  $x = \varphi(y) = 2y + 4$  die Umkehrfunktion. Für die Umkehrfunktion  $x = \varphi(y)$  ist der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{f(x + \Delta x) - f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}} \quad (186)$$

Ist wie in diesem Beispiel die Funktion  $f(x)$  und damit auch die Umkehrfunktion eindeutig in einem bestimmten Intervall, so läßt sich der Grenzprozeß ausführen und die Ableitung der Umkehrfunktion  $\varphi'(y)$  durch die Ableitung der Funktion  $f'(x)$  ausdrücken

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{Ableitung der Umkehrfunktion} \quad (187)$$

### Ableitung von trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen

$$\frac{d}{dx} \sin x = \frac{1}{2i} \frac{d}{dx} (e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{2i} (ie^{ix} + ie^{-ix}) = \cos x \quad (188)$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{2} (ie^{ix} - ie^{-ix}) = -\frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) = -\sin x \quad (189)$$

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \cosh x \quad (190)$$

$$\frac{d}{dx} \tanh x = \frac{\sinh' x}{\cosh x} - \frac{\sinh x \cosh' x}{\cosh^2 x} = 1 - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x} \quad (191)$$

**Ableitung von  $y = \operatorname{arsinh}(x)$ :** Die ursprüngliche Funktion davon ist  $x = \sinh y$ . Nun differenzieren wir die letzte Gleichung, d.h. wir bilden auf beiden Seiten die Ableitung nach  $x$  und wenden dabei die Kettenregel an.

$$\frac{d}{dx} \sinh y = \frac{d}{dx} x, \quad \rightarrow \quad \cosh y y' = 1 \quad (192)$$

Damit folgt

$$y' = \frac{d}{dx} \operatorname{arsinh} x = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2 y + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (193)$$

Regeln für die Ableitung von Umkehrfunktionen auch hier anwenden: **Ableitung von  $y = \operatorname{artanh}(x)$ ?**

$$\frac{d}{dx} \tanh y = \frac{d}{dx} x, \quad \rightarrow \quad (1 - \tanh^2 x) y' = 1 \quad (194)$$

$$y' = \frac{d}{dx} \operatorname{artanh} x = \frac{1}{1 + \tanh y} = \frac{1}{1 - x^2} \quad (195)$$

**Regel von l'Hospital:** Sind zwei Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  in einer Umgebung von  $x_0$  differenzierbar und ist  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)/g(x))$  von der Form  $[\frac{0}{0}]$  bzw.  $[\frac{\infty}{\infty}]$ , dann ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad , \quad (196)$$

falls der letzte Grenzwert existiert. Ein Beispiel hierfür ist die Funktion  $\frac{\sin x}{x}$ , bei der sich für  $x \rightarrow 0$  das Problem  $0/0$  ergibt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1 \quad (197)$$

..\*\*)

#### 4.16 Anwendungsbeispiel für den $\tanh(x)$

Wie in Abschnitt 4.13 bereits durch das Beispiel der Solitonlösung angedeutet, lassen sich in mehreren Fällen Lösungen von Gleichungen für wichtige Naturphänomene durch hyperbolische Funktionen ausdrücken.

Ein weiteres Beispiel ist folgende Gleichung

$$0 = u(x) + \frac{\xi^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} u(x) - u^3(x) . \quad (198)$$

Diese beschreibt in dieser oder in leicht veränderter Form Phänomene im Magneten (Sprünge in der magnetischen Diplostärke), Defektstrukturen im Supraleiter oder "Phasensprünge" in der Konvektion (beispielsweise in "Wolkenstraßen") und in anderen selbstorganisierenden chemischen oder biologischen Systemen.

Es ist eine nichtlineare Differentialgleichung und diese Gleichung hat die hyperbolische Funktion  $u(x) = \tanh(x/\xi)$  als Lösung. Dies können wir mit dem bisher gelernten Stoff leicht nachprüfen, indem man den  $\tanh(x/\xi)$  zweimal nach  $x$  ableitet. Die erste Ableitung ist oben bereits ausgeführt worden und leiten wir diese noch einmal ab und bekommen dadurch

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \tanh\left(\frac{x}{\xi}\right) &= \frac{1}{\xi} \frac{d}{dx} \left( 1 - \tanh^2\left(\frac{x}{\xi}\right) \right) \\ &= -\frac{2}{\xi^2} \tanh\left(\frac{x}{\xi}\right) \frac{d}{dx} \tanh\left(\frac{x}{\xi}\right) \\ &= -\frac{2}{\xi^2} \tanh\left(\frac{x}{\xi}\right) \left( 1 - \tanh^2\left(\frac{x}{\xi}\right) \right) \end{aligned} \quad (199)$$

Setzt man diese Ableitung ein und sammelt die Vorfaktoren von  $\tanh(x/\xi)$  und  $\tanh^3(x/\xi)$  so verschwinden diese Vorfaktoren und damit ist gezeigt, dass  $\tanh(x/\xi)$  eine Lösung von (198) ist. Für  $x \rightarrow \pm\infty$  strebt  $\tanh(x/\xi) \rightarrow \pm 1$ . Die Breite des Übergangsbereiches von  $-1$  nach  $+1$  wird durch die "Länge"  $\xi$  bestimmt, welche in jedem der erwähnten Systeme eine andere Bedeutung hat.

## 5 Approximation von Funktionen

Funktionen als Lösungen von Differentialgleichungen sind oft so kompliziert, dass sie nicht in geschlossener Form angegeben werden können. In vielen Fällen braucht man genaue Funktionswerte auch nur in bestimmten Bereichen des Arguments. Wir hätten also gerne ein Verfahren, um eine Funktion in (beliebiger) Näherung durch einfach handhabbare Teilfunktionen zu approximieren. Genau dies leistet die Taylorentwicklung.

### 5.1 Taylor-Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen

Mit der geometrischen Reihe und der Exponentialreihe haben wir bereits im Abschnitt 3 Darstellungen von Funktionen durch Potenzreihen kennengelernt. Wie erhält man nun Potenzreihen?

Nehmen wir an, wir *hätten* bereits eine Funktion  $f(x)$  in Form einer Potenzreihe mit bekannten Koeffizienten  $a_n$  für alle  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  dargestellt. Für die Exponentialreihe war  $a_n = 1/n!$ .

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad . \quad (200)$$

Wie finden wir die Koeffizienten durch formale Operationen an der Funktion  $f(x)$ ?

Nun, wir differenzieren  $f(x)$  einmal, zweimal, dreimal etc. nach  $x$ , und setzen dann  $x = 0$ . Hierbei sei  $f^{(n)}$  die  $n$ -te Ableitung von  $f(x)$  nach  $x$ . Wir finden folgendes:

$$\begin{aligned} f(0) &= a_0 \quad , \\ f^{(1)}(0) &= a_1 \quad , \\ f^{(2)}(0) &= 2 \cdot a_2 \quad , \\ f^{(3)}(0) &= 3 \cdot 2 \cdot a_3 \quad , \\ f^{(4)}(0) &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4 \quad , \\ &\dots = \dots \quad , \\ f^{(n)}(0) &= n! a_n \quad , \end{aligned} \quad (201)$$

Damit folgt die neue Darstellung der Funktion

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \dots \quad (202)$$

Natürlich sind wir nicht auf diese Entwicklung um den Ursprung  $x = 0$  fixiert. Durch schlichte Verschiebung des Ursprungs nach  $x = b$  erhalten wir die Taylor-Reihe für  $f(x)$  um den Punkt  $x = b$ :

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!} (x-b)^n = f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{1}{2!} f''(b)(x-b)^2 + \dots} \quad (203)$$

Wir haben damit ein wirksames Verfahren gefunden, um nahezu beliebige Funktionen durch einfache Summen von Potenzen auszudrücken. Wir können diese Taylorreihen näherungsweise nach einer endlichen Anzahl von Termen abbrechen, wobei die Ergebnisse dann natürlich gerade in der Nähe des Entwicklungspunktes besonders gut sind. Funktionen, die in einer gewissen Umgebung eines Punktes mit beliebiger Genauigkeit durch eine Potenzreihe dargestellt werden können, nennt man auch **analytische Funktionen**.

Solche Potenzreihen sind offenbar auch sehr einfach zu integrieren, allerdings muss am Schluss einer Rechnung wieder die Summe ausgeführt werden, um einen geschlossenen Ausdruck zu erhalten.

Ein kleines Beispiel ist die Entwicklung von  $\ln(1+x)$  in der Nähe von  $x = 0$ :  $\ln(1+x) \sim \ln(1) + \ln'(1)x = x + \dots$  oder die Entwicklung einer anderen Funktion ebenfalls bei  $x = 0$ :  $1/(1+x^2) \sim 1 - 2x + \dots$ .

## 5.2 Newton-Verfahren

Oftmals ist die Stelle  $x^*$  gesucht, an der eine Funktion  $f(x^*) = 0$  verschwindet. Allerdings lassen sich die Nullstellen nur selten exakt angeben, wie z.B. bei der quadratischen Gleichung  $x^2 + bx + c = 0$ . Man ist dann auf Näherungsverfahren angewiesen. Das bekannteste ist wohl das folgende von Newton angegebene Näherungsverfahren. Das Newton-Verfahren nutzt die Taylor-Entwicklung der Funktion  $f(x)$  an einer Stelle  $f(x_i)$  aus und gibt eine Vorschrift an, wie man sich an  $x^*$  durch mehrmalige Iterationen herantastet. Als Startpunkt wird der Funktionswert an einer Stelle  $x_0$  benötigt und deren Ableitung  $f'(x_0)$ . Damit kann die Tangentengleichung

$$T_0(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (204)$$

aufgestellt werden, und man kann die Nullstelle  $x_1$  der Tangentenfunktion  $T_0(x_1) = 0$  bestimmen

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (205)$$

Im nächsten Schritt wird  $f(x_1)$  und  $f'(x_1)$  berechnet und es folgt mit

$$T_1(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) \quad (206)$$

die Nullstelle von  $T_1(x_2) = 0$  mit

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (207)$$

Man fährt nun solange mit diesem Iterationsschema

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}} \quad (208)$$

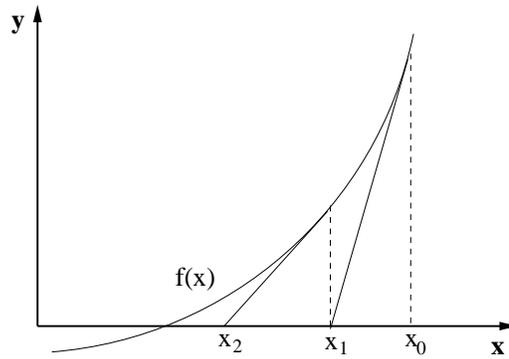


Abbildung 21: Gerade und Parabel, sowie die Überlagerung beider Kurven.

fort, bis die Unterschiede zwischen  $x_{i+1}$  und  $x_i$  klein sind, d.h.  $f(x_i)$  klein ist und das die Iteration konvergiert, bzw.  $x_{i+1} - x_i$  so klein ist wie gewünscht (aber auf dem Computer nicht kleiner als die Maschinengenauigkeit). Der Startwert sollte schon gut geschätzt werden. Die Funktion muß monoton steigend (fallend) sein in dem Bereich, wo die Nullstelle und der Schätzwert liegt. Dies ist auch insbesondere dann wichtig, wenn die Funktion  $f(x)$  zwei nahe benachbarte Nullstellen besitzt. Wenn zwischen diesen Nullstellen eine Polstelle liegt, ist noch weitere Vorsicht gefordert.

Eine Alternative hierzu ist die Intervallschachtelung: Weiss man, dass zwischen zwei  $x$ -Werten eine Nullstelle der Funktion liegt, so lässt sich diese Nullstelle offenbar sicher finden. Man muss nur das Intervall, in dem sich die Nullstelle befindet, iterativ immer weiter halbieren.

## 6 Integral-Rechnung

Das Integral spielt zur Formulierung (nicht nur) physikalischer Gesetze neben dem Differenzenquotienten bzw. dem Differentialquotienten eine ebenso bedeutende Rolle. Während das Differential, wie der Name sagt, auf Differenzen basiert, versucht das Integral, wieder zu summieren. Am besten denkt man sich das Integrieren technisch einfach als eine Summation über viele Einzelemente des Integranden. Wir werden Bewegungsgleichungen für die zeitliche Entwicklung physikalischer Systeme meist als Differentialgleichungen formulieren. Daher erweist sich die Integration der Gleichungen als Methode für eine Vorhersage, wie sich das System in die Zukunft entwickeln wird. Beide Begriffe, Differentiation und Integration sind eng miteinander verwoben. Historisch sind sie gemeinsam entwickelt worden.

### 6.1 Das bestimmte Integral

Ein Integral lässt sich etwa als Fläche unter einer Kurve  $f(x)$  veranschaulichen, wie z.B. die Fläche zwischen  $x = a$  und  $x = b$  unter der Kurve  $f(x)$  in Abb. 22.

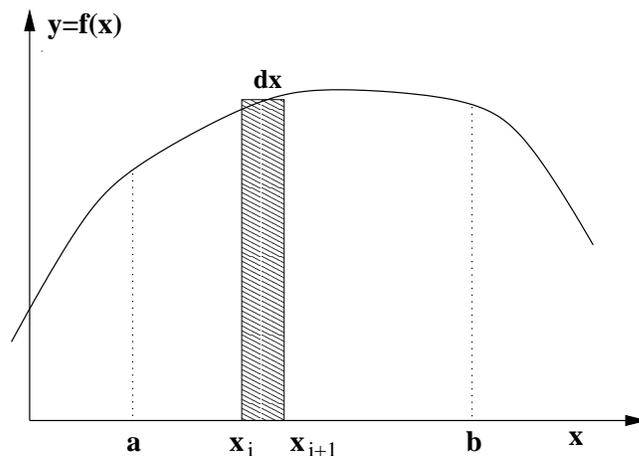


Abbildung 22: Integral als die Fläche unter eine Kurve  $f(x)$  zwischen  $a$  und  $b$ .

Von einem bestimmten Integral spricht man,

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (209)$$

wenn die untere Grenze  $x = a$  und die obere Grenze  $x = b$  festliegen.  $f(x)$  wird in diesem Zusammenhang auch Integrand genannt.

Eine Näherung des Integrales folgt durch Unterteilung des Intervalles  $[a, b]$  in  $n$ -Teilintervalle der Breite  $\Delta x = (b - a)/n$ , der anschließenden Berechnung der Funktion  $f(x)$  an den

Stellen  $x_k = a + k\Delta x$  ( $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ ) und der Berechnung der Summe.

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x. \quad (210)$$

Bei numerischen Berechnungen von Integralen mit dem Computer wird eine ähnliche Diskretisierung und Summenbildung vorgenommen. Der bei der Näherung der Fläche durch kleine Rechtecke begangene Fehler läßt sich bei analytischen Betrachtungen durch Verkleinerung von  $\Delta x \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) minimieren (Beim Computer setzen Rundungsfehler der einfachen Verkleinerung von  $\Delta x$  zur Verbesserung der Genauigkeit Grenzen.)

Beispiel:  $I = \int_0^b x^2 dx$ : Hierfür unterteilen wir die Fläche unter der Kurve  $y = x^2$  zwischen 0 und  $b$  in  $n$  Rechtecke der Breite  $h$ . Die Fläche des  $k$ -ten Rechteckes ist  $(kh)^2 h = k^2 h^3$ . Aufsummation aller Rechtecke liefert mit Hilfe der in den Übungen bestimmten Summenformel  $\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = n(n-1)(2n-1)/6$  die Gesamtfläche

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} k^2 h^3 = h^3 \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = h^3 \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1).$$

Da  $h = b/n$  läßt sich  $A$  weiter umformen

$$A = \left(\frac{b^3}{n^3}\right) \frac{n}{6} (n-1)(2n-1) = \frac{b^3}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right).$$

Im Limes  $n \rightarrow \infty$  strebt der Wert der Fläche gegen  $A \rightarrow \frac{b^3}{3}$ . Wir werden dies noch auf andere Weise bestätigen.

Nun listen wir noch einige Regeln für bestimmte Integrale auf, die sie unmittelbar einsehen, wenn die Summendarstellung (210) zum Einsatz kommt.

$$\begin{aligned} \int_a^b \alpha f(x) dx &= \alpha \int_a^b f(x) dx, \\ \int_a^b f(x) dx &= - \int_b^a f(x) dx, \\ \int_a^c f(x) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx, \\ \int_a^b [f(x) + g(x)] dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \end{aligned} \quad (211)$$

## 6.2 Das unbestimmte Integral

Die Integration kann auch als inverse Operation der Differentiation aufgefaßt werden. Ist  $F'(x) = f(x)$ , so heißt  $F(x)$  eine *Stammfunktion* von  $f(x)$ . Prüfen wir dies kurz nach und betrachten hierzu das Integral mit variabler Obergrenze  $x$

$$F(x) = \int_{\alpha}^x f(u)du \quad , \quad (212)$$

und einer neuen Hilfsvariablen  $u$ . Jetzt berechnen wir  $F(x + \Delta x)$

$$\begin{aligned} F(x + \Delta x) &= \int_{\alpha}^{x+\Delta x} f(u)du = \int_{\alpha}^x f(u)du + \int_x^{x+\Delta x} f(u)du \\ &= F(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(u)du . \end{aligned}$$

Beide  $F$ 's nach links gebracht und Division durch  $\Delta x$  liefert

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(u)du \quad .$$

Für kleines  $\Delta x$  unterscheidet sich  $f(u)$  mit  $u \in [x, x + \Delta x]$  kaum von  $f(x)$  und das Integral kann durch  $f(x)\Delta x$  genähert werden. Im Limes  $\Delta x \rightarrow 0$  wird diese Näherung sogar exakt, und man erhält

$$F'(x) = \frac{dF}{dx} = f(x) \quad (213)$$

oder auch

$$\frac{d}{dx} \left[ \int_{\alpha}^x f(u)du \right] = f(x) . \quad (214)$$

Diese beiden Relationen machen nochmals deutlich, dass die Integration als der inverse Prozeß der Differentiation betrachtet werden kann. Die Konstante  $\alpha$  in (214) ist allerdings beliebig. Dies bedeutet, die Ableitung besitzt keine eindeutige Umkehrung. Jene Funktion  $F(x)$ , die (213) erfüllt wird auch unbestimmtes Integral von  $f(x)$  genannt, wobei  $F(x)$  bis auf eine Integrationskonstante  $c$  bestimmt ist.

$$F(x) = \int f(u)du + c \quad (215)$$

Durch Ableitung der Gleichung verschwindet wegen  $\frac{dc}{dx} = 0$  die Konstante wieder. Auch das bestimmte Integral kann durch die Stammfunktion  $F(x)$  ausgedrückt werden.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^b f(x)dx - \int_{x_0}^a f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (216)$$

Während bei der Differentiation durch wiederholte Anwendung von Produkt- und Summenregel das endgültige Resultat für die Ableitung folgt, ist dies bei der Integration nicht immer möglich. Man sagt auch

*”die Differentiation gehört zum Handwerk und die Integration zur Kunst”.*

Trotzdem lassen sich für viele elementare Funktionen  $f(x)$  die Stammfunktionen  $F(x)$  berechnen, wie wir gleich sehen. Allerdings bleibt man bei vielen weiteren und hier nicht behandelten Problemen auch auf die numerische Berechnung eines Integrales angewiesen.

### **6.3 Tabelle einiger Integrale**

Für eine Reihe von Funktionen  $f(x)$  kann die Stammfunktion  $F(x)$  einfach durch ”rückwärtslesen” der Formeln in den Gleichung (188) ermittelt werden. Wir notieren in der Tabelle die Ausgangsfunktion  $f(x)$  und aus dem unbestimmten Integral  $\int f(x)dx = F(x) + c$  nur die Stammfunktion  $F(x)$  ohne die Konstante  $c$ .

f(x)	F(x)	Anmerk.
$x^n$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$x \neq 0$
$e^{(ax)}$	$\frac{1}{a}e^{(ax)}$	
$\sin(ax)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax)$	
$\cos(ax)$	$\frac{1}{a}\sin(ax)$	
$\frac{1}{\cos^2(ax)}$	$\frac{1}{a}\tan(ax)$	$x \neq (2k+1)\pi/a$
$\frac{1}{\sin^2(ax)}$	$-\frac{1}{a}\cot(ax)$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$ x  < 1$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$	$ x  < 1$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	
$\frac{1}{\cosh^2(ax)}$	$\frac{1}{a}\tanh(ax)$	
$\frac{1}{\sinh^2(ax)}$	$-\frac{1}{a}\coth(ax)$	
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh}(x) = \ln (x + \sqrt{x^2-1}) $	$ x  > 1$

(\*\*\_

## 6.4 Integration harmonischer Funktionen

Integrale vom Typ  $\int \sin^n(x)dx$  und  $\int \cos^n(x)dx$  können durch geeignete trigonometrische Umformungen berechnet werden. Hierzu zwei Beispiele: eines für gerades und eines für ungerades  $n$ . In beiden Fällen wird der Integrand so umgeformt, dass der Integrand die Ableitung einer Potenz von  $\sin$  oder  $\cos$  ist.

Beispiel 1:  $I = \int \sin^5 x dx$  wird berechnet, indem wir  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$  ausnutzen. Damit folgt

$$\begin{aligned}
 I &= \int \sin^4 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x dx = \int dx(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \sin x dx \\
 &= \int dx(\sin x - 2\sin x \cos^2 x + \sin x \cos^4 x) dx = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + c \quad ,
 \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt einfach  $\frac{d}{dx} \cos^3 x = -3 \sin x \cos^2 x$  etc. verwendet haben.

Beispiel 2:  $I = \int \cos^4 x dx$  wird berechnet, indem wir  $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$  ausnutzen.

$$I = \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \frac{1}{4} (1 + \cos 2x)^2 dx = \int \frac{1}{4} (1 + 2 \cos(2x) + \cos^2(2x)) dx$$

Benutzt man zusätzlich  $\cos^2(2x) = \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)$ , so folgt

$$\begin{aligned} I &= \int \left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{8} (1 + \cos(4x)) \right] dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32} \sin(4x) + c \\ &= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{32} \sin(4x) + c \quad . \end{aligned} \quad (217)$$

## 6.5 Logarithmische Integration

Aus dem Abschnitt über Differentiation wissen wir  $\frac{d}{dx} \ln[f(x)] = f'(x)/f(x)$ . Dies bedeutet natürlich

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int d \ln(x) = \ln(f(x)) + c \quad (218)$$

Mit dieser Kenntnis kann man folgendes Integral leicht berechnen, an dessen Integranden unschwer zu erkennen ist, dass der Zähler proportional zur Ableitung des Nenners ist.

$$I = \int \frac{6x^2 + 2 \cos x}{x^3 + \sin x} dx = 2 \ln(x^3 + \sin x) + c \quad (219)$$

.)  
-\*\*) )

## 6.6 Integration durch Substitution

Durch Substitution kann oft ein kompliziertes Integral in ein einfacheres und manchmal schon bekanntes Integral umgeformt werden. Zu erkennen, welche Substitution gerade geeignet ist, ist oft eine Frage der Erfahrung.

Beispiel:  $I = \int \sqrt{2x+1} dx$ . Durch die Substitution  $z = 2x+1$  wird eine neue Variable eingeführt. Damit ist der Integrand nun  $\sqrt{z}$ . Wegen  $\frac{dz}{dx} = 2$  können wir im Integral  $dx = \frac{1}{2} dz$  ersetzen.

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{z} dz = \frac{1}{3} z^{3/2} + c \\ &= \frac{1}{3} (2x+1)^{3/2} + c = \frac{1}{3} (2x+1) \sqrt{2x+1} + c \quad . \end{aligned} \quad (220)$$

## 6.7 Partielle Integration

Partielle Integration ist die Analogie zur Differentiation eines Produktes. Das Prinzip ist, eine komplizierte Funktion in ein Produkt zweier oder mehrerer Funktionen aufzuspalten, von denen die Stammfunktion schon bekannt ist. Hierzu gehen wir von der Produktregel (13) aus

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v \quad .$$

Durch Integration dieser Gleichung finden wir mit  $uv|_a^b \equiv u(b)v(b) - u(a)v(a)$  formal

$$uv|_a^b = \int_a^b u \frac{dv}{dx} dx + \int_a^b \frac{du}{dx} v dx$$

und durch Umstellen folgt die häufig gebrauchte Form

$$\int_a^b u \frac{dv}{dx} dx = uv|_a^b - \int_a^b \frac{du}{dx} v dx \quad . \quad (221)$$

Hier hofft man natürlich, dass das Integral auf der rechten Seite einfacher auszurechnen ist, als das auf der linken Seite. Die Funktionsweise dieser Regel lernt man am schnellsten wieder an Beispielen.

Beispiel 1:  $I = \int x \sin x dx$ .

Hierzu identifizieren wir  $u = x$  und  $\frac{dv}{dx} = \sin x$ . Damit folgt  $v = -\cos x$  und  $\frac{du}{dx} = 1$ . Nutzt man dies zusammen mit Regel (221), so folgt

$$I = x(-\cos x) - \int (1)(-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + c.$$

Nicht immer ist die Identifikation der Funktion  $u$  und  $v$  so offensichtlich, wie folgendes Beispiel verdeutlicht.

.  
(\*\*\_

Beispiel 2:  $I = \int x^3 e^{-x^2} dx$

Nun identifizieren wir  $u = x^2$  und  $\frac{dv}{dx} = x e^{-x^2}$ . Dann haben wir  $v = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$  und  $\frac{du}{dx} = 2x$  und wir bekommen

$$I = -\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} - \int (-x) e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2} e^{-x^2} + c \quad ,$$

wobei wir im letzten Schritt nochmals  $\frac{dv}{dx} = x e^{-x^2}$  ausgenutzt haben.

Ein weiterer Trick ist manchmal die "1" als Faktor des Produktes zu identifizieren.

Beispiel 3:  $I = \int \ln x dx$

Hier identifizieren wir  $u = \ln x$  und  $\frac{dv}{dx} = 1$ . Damit ist  $v = x$  und  $\frac{du}{dx} = 1/x$  und wir bekommen

$$I = (\ln x)(x) - \int \left(\frac{1}{x}\right) x dx = x \ln x - x + c$$

Beispiel 4: Bei Integranden der Gestalt  $x^n e^{ax} (n \in \mathcal{N})$  kann der Exponent  $n$  durch partielle Integration erniedrigt werden:

$$I_n = \int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx \quad .$$

Dadurch erhält man die Rekursionsformel

$$I_n = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} I_{n-1} \quad , \quad (222)$$

die  $I_n$  sukzessive auf  $I_0 = \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$  zurückführt. Mit  $I_n$  hat man auch Stammfunktionen zu  $x^n e^{ax} \cos(bx)$  und  $x^n e^{ax} \sin(bx)$  ( $a, b \in \mathcal{R}$ . Ist  $c = a + ib$ , so gilt

$$\int x^n e^{ax} \cos bx dx = \operatorname{Re} I_n, \quad \int x^n e^{ax} \sin bx dx = \operatorname{Im} I_n \quad . \quad (223)$$

Beispiel 5: Mit  $v(x) = x$  können auch folgende Integrale berechnet werden.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \frac{1}{2} (x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) \quad * \text{ auf } [-1; 1] \\ \int \sqrt{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} (x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arcsinh} x) \\ \int \sqrt{x^2-1} dx &= \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2-1} - \operatorname{arcosh} x) \quad \text{auf } [1; \infty] \end{aligned}$$

Exemplarisch führen wir das erste Integral vor

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} \cdot 1 dx &= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{x(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x - \int \sqrt{1-x^2} dx \end{aligned}$$

Die gleichen Terme auf der linken und rechten Seite können nun zusammengefaßt werden und ergeben obige Formel.

..\*\*)

## 6.8 Integration durch Partialbruchzerlegung

Bei dieser Methode versucht man durch einfache Umformungen einen komplizierten Bruch als Integranden in eine Summe von zwei einfachen Brüchen zu zerlegen, deren Stammfunktionen möglichst schon bekannt sind.

Beispiel:  $I = \int \frac{1}{x^2+x} dx = \int \frac{1}{x(1+x)} dx$

Der Integrand kann auch wie folgt umgeschrieben werden

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(1+x)} \quad , \quad \text{denn}$$

damit wird  $I$

$$I = \int \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln x - \ln(x+1) + c = \ln \left( \frac{x}{x+1} \right) + c \quad .$$

## 6.9 Mehrfachintegrale

Ähnlich wie die Ableitungen von Funktionen mit mehreren Variablen  $f(x, y)$  (hier nur zwei, nämlich  $x$  und  $y$ ), so stellt sich auch häufig das Problem der Integration von Funktionen mit mehreren Variablen

$$I = \int \int_R f(x, y) dx dy \quad , \quad (224)$$

wobei in Abb. 23 mit  $R$  die Fläche angedeutet ist, über die integriert werden soll. Eine andere häufige Aufgabe ist die Berechnung von Volumina von zum Teil komplizierten Gebilden. Weitere Beispiele für mehrdimensionale Integration sind auch Mittelwerte verschiedenster Größen, Schwerpunktsberechnungen, Trägheitsmomente, Drehimpulse etc. .

Ein Problem bei der Integration in höheren Dimensionen ist bereits in der Ebene an dem in Abbildung 23 gezeigten Gebiet zu sehen: Die Integrationsgrenzen entlang der  $x$ -Achse sind nun eine Funktion von  $y$ . (Entsprechend können die Integrationsgrenzen entlang einer Koordinatenachse in drei und mehr Dimensionen von mehr Variablen abhängen.)

Für das in Abbildung 23 gezeigte Gebiet bietet sich zum Beispiel folgende Abfolge der Integrationsschritte an

$$I = \int_{y=c}^{y=d} \left[ \int_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} f(x, y) dx \right] dy \quad . \quad (225)$$

Das gleiche Resultat wird allerdings erreicht, wenn die Reihenfolge der Integration vertauscht wird und man wie folgt schreibt.

$$I = \int_{x=a}^{x=b} \left[ \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x, y) dy \right] dx \quad . \quad (226)$$

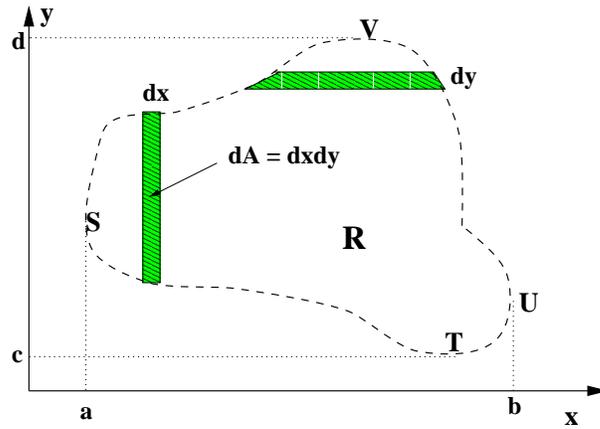


Abbildung 23: Ein einfaches Gebiet in der  $xy$ -Ebene auf dem die Funktion  $f(x, y)$  definiert ist und auf dem diese integriert werden soll.

Am schnellsten verdeutlicht man sich dieses wichtige Resultat an einem Beispiel.

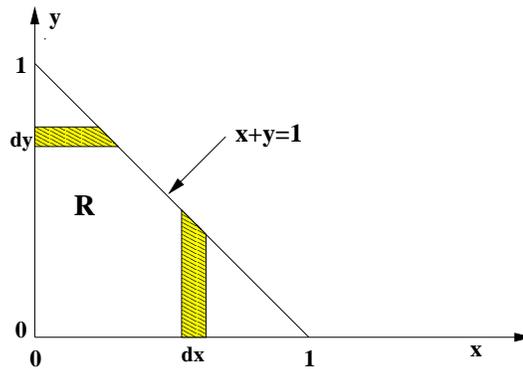


Abbildung 24: Das zweidimensionale Integrationsgebiet ist ein Dreieck, welche von den Linien  $x = 0$ ,  $y = 0$  und  $x + y = 1$  begrenzt wird.

Beispiel: Berechnen wir das Integral

$$I = \int \int_R x^2 y \, dx \, dy \quad (227)$$

über die in Abb. 24 angedeutete Dreiecksfläche, welches von den Linien  $x = 0$ ,  $y = 0$  und  $x + y = 1$  begrenzt wird.

Beim ersten Zugang führen wir das Integral bzgl.  $y$  zuerst aus

$$I = \int_{x=0}^{x=1} \left[ \int_{y=0}^{y=1-x} x^2 y \, dy \right] dx = \int_{x=0}^{x=1} \left[ \frac{x^2 y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1-x} * dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4) dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{2x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{60}.$$

Da die Integrationsreihenfolge vertauscht werden kann, berechnen wir alternativ nun zuerst das Integral bzgl.  $x$ .

$$\begin{aligned} I &= \int_{y=0}^{y=1} \left[ \int_{x=0}^{x=1-y} x^2 y dx \right] dy = \int_{y=0}^{y=1} \left[ \frac{x^3 y}{3} \right]_{x=0}^{x=1-y} dy = \\ &= \int_0^1 \frac{(1-y)^3 y}{3} dy = \frac{1}{3} \int_0^1 (y - 3y^2 + 3y^3 - y^4) dy = \frac{1}{60}. \end{aligned}$$

Beide Integrationsreihenfolgen liefern das gleiche Resultat.

Diese elementaren Schritte der Mehrfachintegration für zwei Variablen lassen sich nun direkt auf drei und mehr Variable erweitern. Die Details hierzu kommen in späteren Vorlesungen bzw. sind intuitiv klar.

## 6.10 Variablentransformation und Jacobi-Determinante

Oft legen es das Integrationsgebiet oder die Eigenschaften des Integranden nahe, anstelle der kartesischen Koordinaten andere besser angepaßte Koordinaten zu wählen. Ein häufiges Beispiel ist der Übergang von kartesischen Koordinaten zu Polarkoordinaten bei kreisförmigen Integrationsgebieten, wie in Abbildung 25 erläutert. Hier ist aus

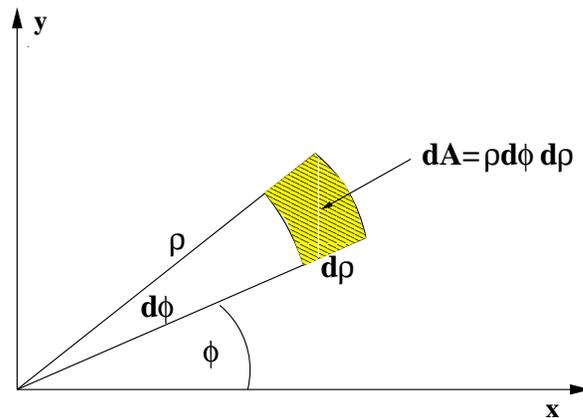


Abbildung 25: Das Flächenelement in Polarkoordinaten ist  $dA = \rho d\phi d\rho$ . Diese Form von  $dA$  ist aus dieser Skizze auch schon ohne die weiter unten erläuterte Jacobi-Determinante erkennbar.

der geometrischen Anschauung unmittelbar klar, dass bei Polarkoordinaten im Integral

das Flächenelement

$$dA = \rho d\phi d\rho. \quad (228)$$

Dadurch werden in kreisförmigen Integrationsgebieten, wie bei einer Kreisfläche, die Integration bzgl.  $\rho$  und  $\phi$  voneinander entkoppelt. Dies führt zu deutlichen Vereinfachungen bei den jeweiligen Rechnungen, wie weiter unten an Beispielen noch gezeigt wird. Vorher wollen wir allerdings die allgemeine Methode besprechen, wie sich das Flächenelement in einem Integral beim Übergang von einem zu einem anderen Koordinatensystem dann berechnet. Da hier nur das Prinzip angedeutet werden soll, beschränken wir uns hier auf zwei Raumdimensionen. Das Schema am Ende ist auf beliebige Raumdimensionen übertragbar.

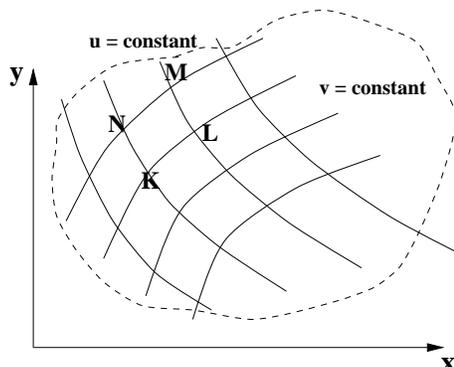


Abbildung 26: Das von der gestrichelten Linie umrandete Gebiet  $R$  ist von einer Familie von Kurven mit  $u = \text{const.}$  und  $v = \text{const.}$  überdeckt. Das Parallelogramm  $KLMN$  ist das Flächenelement in den neuen Koordinaten.

Betrachten wir die in Abbildung 26 gezeigte Integrationsfläche  $R$ . Das Integral einer auf diesem Gebiet  $R$  definierte Funktion von zwei Variablen  $f(x, y)$  ist

$$I = \int \int_R f(x, y) dx dy. \quad (229)$$

Wollen wir dieses Integral in den neuen Koordinaten ausführen, so müssen nicht nur die neuen Koordinaten  $u = u(x, y)$  und  $v = v(x, y)$  als Funktion von  $x$  und  $y$  ausgedrückt werden, auch das Flächenelement in kartesischen Koordinaten  $dA_{xy} = dx dy$  muss umgerechnet werden. Die Verbindung zwischen  $dA_{xy}$  und  $dA_{uv}$  in den neuen Koordinaten kann man erkennen, wenn man das  $uv$ -Gitter in Abb.26 betrachtet.

Entlang der Verbindungslinie  $K - L$  ist  $v$  konstant und  $u$  ändert sich, aber auch die Werte der kartesischen Koordinaten ändern sich und man erhält mit einer Taylor-Entwicklung

$$\begin{aligned} x_K &\rightarrow x_L = x_K + \frac{\partial x}{\partial u} du && \text{und} \\ y_K &\rightarrow y_L = y_K + \frac{\partial y}{\partial u} du \end{aligned}$$

Diesen kleinen Weg von  $K \rightarrow L$  kann man nun auch durch den dreikomponentigen Vektor

$$d\mathbf{r}_u = \left( \frac{\partial x}{\partial u} du, \frac{\partial y}{\partial u} du, 0 \right)$$

darstellen. Entsprechend ist entlang des Weges  $K \rightarrow N$  die neue Variable  $u$  konstant und diese kleine Wegstrecke können wir durch den Vektor

$$d\mathbf{r}_v = \left( \frac{\partial x}{\partial v} dv, \frac{\partial y}{\partial v} dv, 0 \right)$$

darstellen. Die beiden Vektoren spannen nun das Parallelogramm  $KLMN$  auf, dessen Flächeninhalt  $dA_{uv}$  nach Gleichung (63) sich durch den Betrag des Vektorproduktes

$$dA_{uv} = |d\mathbf{r}_u \times d\mathbf{r}_v| = \left| \frac{\partial x}{\partial u} du \frac{\partial y}{\partial v} dv - \frac{\partial y}{\partial u} du \frac{\partial x}{\partial v} dv \right| = \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right| dudv$$

ausdrücken lässt. Dies wiederum ist proportional zur Determinante der  $2 \times 2$  Jacobi-Matrix  $\mathcal{J}$

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}, \quad (230)$$

denn die Determinante dieser Matrix ist

$$\begin{aligned} |det(\mathcal{J})| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \left[ \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right] \\ &= \left[ \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] \end{aligned} \quad (231)$$

Damit wird unser Integral in den neuen Koordinaten

$$I = \int \int_R f(x, y) dx dy = \int \int_{R'} f(x(u, v), y(u, v)) \left[ \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] dudv. \quad (232)$$

## Zwei Beispiele mit Polarkoordinaten

Im **Beispiel 1** stellen wir uns nun die Aufgabe das Doppelintegral

$$I = \int \int_R \left( a + \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx dy \quad (233)$$

im Gebiet  $R$  innerhalb des Kreises  $x^2 + y^2 = a^2$  zu berechnen.

In kartesischen Koordinaten kann für dieses Problem das Integral wie folgt geschrieben werden.

$$I = \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy (a + \sqrt{x^2 + a^2}) . \quad (234)$$

Allerdings ist diese in kartesischen Koordinaten aufgrund der kreisförmigen Berandung des Integrationsgebietes und der variablen Integrationsgrenze etwas umständlich. Es bieten sich hier die viel günstigeren Polarkoordinaten  $x = \rho \cos(\phi)$  und  $y = \rho \sin(\phi)$  an, weil dort die Integration bzgl. der Variablen  $r$  bis zum Radius  $R$  und für den Winkel  $\varphi$  separieren. Um das Integral nach der Formel (232) umschreiben zu können, muss noch die Determinante der Jacobi Matrix berechnet werden. Hier ist  $u = \rho$  und  $v = \phi$  zu setzen:

$$\det(\mathcal{J}) = \left[ \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] = \begin{vmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\rho \sin \phi & \rho \cos \phi \end{vmatrix} = \rho (\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)) = \rho$$

Demnach ist die Relation zwischen dem Flächenelement in kartesischen Koordinaten und in Polarkoordinaten durch

$$dxdy = \rho d\rho d\phi \quad (235)$$

gegeben. Damit nimmt obiges Integral in Polarkoordinaten ausgedrückt folgende Form an und die Integrations Schritte bzgl.  $\phi$  und  $v$  werden voneinander unabhängig, wodurch die Ausführung des Integrals erheblich erleichtert wird.

$$\begin{aligned} I &= \int \int_{R'} (a + \rho) \rho d\rho d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a d\rho (a + \rho) \rho \\ &= 2\pi \left[ \frac{a\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{3} \right]_0^a = \frac{5\pi a^3}{3} . \end{aligned}$$

Es ist noch anzumerken, dass die Relation zwischen den Flächenelementen in kartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten in Gleichung (235) besonders einfach ist und auch ohne das systematische Vorgehen über die Jacobideterminante bereits aus der Skizze 25 zu erkennen ist.

·  
(\*\*\_

**Beispiel 2 - Fläche der Ellipse** Hier berechnen wir die Fläche der Ellipse, deren Rand vom Ursprung den Abstand  $\rho$  hat und  $\rho$  durch folgende Gleichung bestimmt ist

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \quad .$$

$a$  und  $b$  sind die Längen der beiden Halbachsen. Da jeder Quadrant einer Ellipse gleich ist, reicht eine Integration bis  $\varphi = \pi/2$ .

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho} r dr = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2 d\varphi = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi} \\ &= 2a^2 b^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = 2b^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(b/a)^2 + \tan^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} \end{aligned}$$

Nun machen wir eine Variablensubstitution  $t = \tan \varphi$ . Für  $\varphi \rightarrow 0$  folgt  $t \rightarrow 0$  und für  $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$  folgt  $t \rightarrow \infty$ , womit die Integrationsgrenzen in der neuen Variablen folgen. Außerdem ist noch  $\frac{dt}{d\varphi} = \frac{d \tan \varphi}{d\varphi} = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$ . All dies zusammen genommen ergibt

$$A = 2b^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{(b/a)^2 + t^2} dt \quad .$$

Dies ist aber nun ein Standardintegral aus Tabelle 6.3 bzw.  $\frac{1}{a^2+x^2}$  ist die Ableitung von  $\arctan(\frac{x}{a})$ . Also ist

$$A = 2b^2 \left[ \frac{1}{(b/a)} \arctan \frac{t}{(b/a)} \right]_0^{\infty} = 2ab \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \pi ab \quad .$$

..\*\*)

## 6.11 Gauß-Integrale vom Typ $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$

Ein besonders wichtiges bestimmtes Integral ist das sogenannte Gauß -Integral. Es ist das Integral über die Funktion  $e^{-x^2}$ , mit einer quadratischen Abhängigkeit von  $x$ . Wichtig ist es, weil quadratische Ausdrücke  $x^2$  Extremwerte von Funktionen bei  $x = 0$  charakterisieren, und diese physikalisch immer besonders interessante Funktionsbereiche darstellen, beispielsweise als Energieminima.

Gauß -Integrale sind von  $x = -\infty$  bis  $x = \infty$  analytisch lösbar. Der quadratische Term, so wird sich während ihres Studiums herausstellen, ist auch der einfachste Ausdruck, der die Beschreibung von Wechselwirkungen zweier Systeme gestattet. Wie schon einmal betont, taucht die  $e$ -Funktion dauernd bei der Lösung von Differentialgleichungen auf. Die Funktion  $e^{-x^2}$  erweist sich dazu als die wichtigste Funktion der statistischen

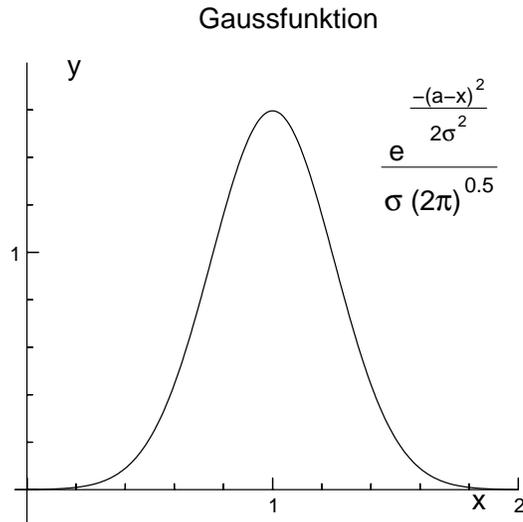


Abbildung 27: Die Gaußfunktion  $f(x) = \frac{e^{-\frac{(a-x)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$  mit  $a = 1$  und  $\sigma = 0.25$ .

Physik, und wir werden dieser Funktion später auch noch bei der Lösung der Diffusionsgleichung begegnen.

Die Grundform des Gauss-Integrals ist

$$I_0(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \quad (\alpha > 0). \quad (236)$$

Dieses Integral kann man **nur** mit einem Trick auswerten. Der Trick ist, man berechnet zuerst  $I_0^2$ .

$$\begin{aligned} [I_0(\alpha)]^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\alpha(x^2+y^2)} \\ &= \int \int_R e^{-\alpha(x^2+y^2)} dx dy, \end{aligned}$$

wobei nun  $R$  die gesamte  $x - y$  Ebene ist.

Jetzt machen wir von Polarkoordinaten Gebrauch:  $x = \rho \cos \varphi$  und  $y = \rho \sin \varphi$ . Damit wird  $x^2 + y^2 = \rho^2$  und das Flächenelement  $dA = dx dy = \rho d\rho d\varphi$ . Weiterhin nutzen wir noch aus, daß  $\frac{d}{d\rho}(e^{-\alpha\rho^2}) = -2\alpha\rho e^{-\alpha\rho^2}$  ist. Das Integral in Polarkoordinaten hat dann die Form

$$I_0^2(\alpha) = \int \int_{R'} e^{-\alpha\rho^2} \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} d\rho \rho e^{-\alpha\rho^2}$$

$$= 2\pi \left[ -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha\rho^2} \right]_0^\infty = \frac{\pi}{\alpha} .$$

Damit hat das ursprüngliche Integral den Wert

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}} \quad (237)$$

bzw. das Integral  $\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/\alpha}$  hat den halben Wert.

## 6.12 Quadratische Ergänzung

Die quadratische Ergänzung ist einer der wichtigsten Tricks in der ganzen theoretischen Physik:

Mit dem obigen Resultat kann auch gleich ein weiteres häufig auftretendes Integral gelöst werden:

$$I_0(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 + \beta x} dx \quad (\alpha > 0) . \quad (238)$$

Zur Berechnung dieses Integrales, schreibt man den Exponenten durch sog. quadratische Ergänzung erst einmal wie folgt um

$$\begin{aligned} -\alpha x^2 + \beta x &= -\alpha \left( x^2 - \frac{\beta}{\alpha} x \right) - \frac{\beta^2}{4\alpha} + \frac{\beta^2}{4\alpha} \\ &= -\alpha \left( x^2 - 2\frac{\beta x}{2\alpha} + \left( \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 \right) + \frac{\beta^2}{4\alpha} \\ &= -\alpha \left( x - \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{\beta^2}{4\alpha} , \end{aligned}$$

Nun kann man den Ausdruck in (238) auf das bekannte Integral (237) zurückzuführen. Mit  $u = x - (\beta/2\alpha)$  wird aus (238)

$$\begin{aligned} I_0(\alpha, \beta) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x-\beta/2\alpha)^2 + \frac{\beta^2}{4\alpha}} dx \\ &= e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha u^2} du = e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \end{aligned} \quad (239)$$

## 6.13 Sattelpunkt-Integration

In der Physik (besonders in der Thermodynamik) treten oft Integrale folgenden Typs auf

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} e^{f(x)} dx \quad (240)$$

wo  $f(x)$  eine reelle Funktion ist, die ein Maximum bei irgendeinem Wert  $x = x_0$  hat, und deren Maximum sehr gross werden kann, relativ zu den sonstigen Werten der Funktion für alle anderen Werte von  $x$ . Das Maximum  $e^{f(x_0)}$  wird dann noch viel schärfer ausfallen.

Wir können dann näherungsweise  $f(x)$  um die Stelle  $x_0$  des Maximums entwickeln:  $f(x) \approx f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$  woraus wir erhalten:

$$A \approx \int_{-\infty}^{\infty} e^{f(x_0)} e^{-\alpha(x-x_0)^2} dx; \quad \alpha = -\frac{1}{2}f''(x_0) \quad (241)$$

Das verbleibende Gauss-Integral ist leicht lösbar:

$$A \approx e^{f(x_0)} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}; \quad \alpha = -\frac{1}{2}f''(x_0) > 0 \quad (242)$$

## 6.14 Approximative Lösung bestimmter Integrale

Häufig treten bestimmte Integrale folgenden Typs auf, die also noch von einem Parameter  $a$  abhängen.

$$F(a) = \int_0^{\infty} f(x, a) dx \quad (243)$$

wobei  $f(x, a)$  eine reelle Funktion ist, die gegen unendlich genügend stark abfällt. Gesucht ist die Abhängigkeit der so definierten Funktion  $F(a)$  von  $a$ .

Die erste Strategie hier ist, den Integranden  $f(x, a)$  bzw. das Integral darüber so zu zerlegen, dass die Lösung sich schreiben lässt als  $F(a) = g(a) C$ . Hier ist gemeint, dass die Konstante  $C = \int_0^{\infty} w(x) dx$  ein noch unaufgelöstes Integral über eine neue Funktion  $w(x)$  enthalten darf, welches aber nicht mehr von  $a$  abhängt.

Ein simples Beispiel ist

$$F(a) = \int_0^{\infty} \exp(-ax) dx \quad (244)$$

welches sich mittels der Substitution  $y = ax$  umschreiben lässt als

$$F(a) = \frac{1}{a}C; \quad C = \int_0^{\infty} \exp(-y) dy \quad (245)$$

Hier lässt sich natürlich auch  $C$  noch leicht ermitteln, die Methode ist aber auch dann noch gut, wenn  $C$  nicht mehr leicht analytisch berechenbar ist.

Praktisch wird man zwar selten so einfach davonkommen, wie in diesem Beispiel angegeben. Aber auch in schwierigeren Fällen kommt man oft weiter, wenn man den Integranden um  $a = 0$  herum (und danach um  $1/a = 0$ ) einer Taylor-Entwicklung (siehe oben!) unterzieht. Man muss dann vielleicht noch das gesamte Integral von 0 bis unendlich in zwei Teile aufspalten, einmal von 0 bis 1, und dann von 1 bis unendlich, aber man kommt so meist schnell zu einem guten Überblick, wie  $F(a)$  von  $a$  funktional abhängt! In der Regel ist die verbleibende Konstante  $C$  ohnehin meist von der Größenordnung  $O(1)$ !

Als illustratives Beispiel versuche man, das Integral

$$F(a) = \int_0^{\infty} \frac{\exp(-x)}{\sqrt{1+ax}} dx \quad (246)$$

zunächst im Limes  $a$  gegen Null, und dann im Limes  $a$  gegen unendlich so darzustellen, wie in Gl.(245) angegeben.

(\*\*\_

## 6.15 Anhang: Gamma-Funktion

**Gamma-Funktion** Durch ein uneigentliches Integral wird auch eine wichtige Funktion beschrieben, die sogenannte Gamma-Funktion  $\Gamma(x)$ :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (x > 0) \quad (247)$$

Die Funktion hat einige wichtige Eigenschaften. Die ersten beiden davon sind:

$$\begin{aligned} x\Gamma(x) &= \Gamma(x+1) \quad , \\ \Gamma(n+1) &= n! \quad . \end{aligned} \quad (248)$$

Hier ist  $x$  als reel und  $n$  als natürliche Zahl angenommen. Die erste Eigenschaft berechnen wir durch partielle Integration

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{\infty} \underbrace{t^x e^{-t}}_{vu'} dt = -t^x e^{-t} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-e^{-t}) x t^{x-1} dt \\ &= x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x) \quad . \end{aligned}$$

Insbesondere gilt auch die Eigenschaft,

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1, \quad (249)$$

welche auch eine sinnvolle Definition von  $0!$  nahelegt.

$$\boxed{0! = \Gamma(1) = 1} \quad (250)$$

Wenden wir die funktionale Beziehung für  $x = n$  (248) mehrmals an, so folgt

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \\ &= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \\ &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = n! \end{aligned}$$

Die Gammafunktion interpoliert also die Fakultät, die nur für natürliche Zahlen definiert ist. (Dass die Gamma-Funktion im Vergleich zur Fakultät irritierend definiert ist,  $\Gamma(n+1) = n!$ , ist leider historisch bedingt.)

Mit der Kenntnis des Gauß-Integrales aus Abschnitt (6.11) können wir auch

$$\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}} \quad (251)$$

berechnen. Um dies zu sehen, machen wir noch eine Variablensubstitution  $t = u^2$ . Also

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi} \quad (252)$$

Nutzt man mit dieser Information nochmals (248) aus, so fällt auf, dass  $\Gamma(x)$  auch für negative Werte definiert ist.

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi} \quad (253)$$

Insbesondere können wir durch Ausnutzung der Gammafunktion auch eine weitere Serie von Gaußintegralen lösen

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty} dy y^{2n} e^{-y^2/x^2} = \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) |x|^{2n+1} \quad (254)$$

**Stirling-Formel:** In vielen Anwendungen, insbesondere in der Statistik und im speziellen auch in der statistischen Physik ist es nützlich, Näherungen für  $n!$  und die Gamma-Funktion für große Argumente zu haben. Beide Größen sind nämlich problematisch auszuwerten, zu vereinfachen, aber auch zu differenzieren. Die Stirlingsche Formel, die wir schon früher benutzten,

$$\Gamma(n+1) = n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \quad (255)$$

stellt die gewünschte Näherung dar. Oft genügt schon der führende Term  $n! \approx e^n \ln(n)$ . Hier nun eine Skizze, wie man zu dieser Formel gelangt. Zuerst ist folgende Umformung günstig.

$$\Gamma(n+1) = n! = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{n \ln x - x} dx \quad (256)$$

Nun machen wir die Variablensubstitution  $x = n + y\sqrt{n}$ . Damit folgt  $dx = \sqrt{n}dy$  und für die untere Integrationsgrenze  $x = 0$  wird  $y = -\sqrt{n}$ .

$$n! = \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{n \ln(n+y\sqrt{n}) - n - y\sqrt{n}} \sqrt{n} dy$$

Für große  $n$  und unter Benutzung der Taylorentwicklung  $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} \dots$  für den Logarithmus wird daraus

$$\begin{aligned} \ln(n + y\sqrt{n}) &= \left( \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right) \right) \\ &\sim \ln(n) + \frac{y}{\sqrt{n}} - \frac{y^2}{2n} + \dots \end{aligned}$$

Wird dies wieder in den Exponenten der  $e$ -Funktion eingesetzt, so folgt

$$\begin{aligned} n! &\sim \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} \exp\left(n \ln(n) + y\sqrt{n} - \frac{y^2}{2} - n - y\sqrt{n}\right) \sqrt{n} dy \\ &= \sqrt{n} e^{n \ln(n) - n} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \\ &= n^n e^{-n} \sqrt{n} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy - \int_{-\infty}^{-\sqrt{n}} e^{-y^2/2} dy \right]. \end{aligned}$$

Im Limes großer  $n$  verschwindet das zweite Integral, das erste Integral ergibt  $\sqrt{2\pi}$  und man bekommt Stirling-Formel

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \quad .$$

.  
\_\*\*)

# 7 Die Diracsche $\delta$ -Funktion

## 7.1 Definition und Eigenschaften

Die Delta-Funktion  $\delta(x)$  ist ziemlich verschieden von den Funktionen, die bisher besprochen wurden. Die Delta-Funktion dient dazu, unter einem Integral den Wert des Integranden  $f(x)$  an einer bestimmten Stelle  $x_0$  'herauszustanzen':

$$f(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta(x - x_0). \quad (257)$$

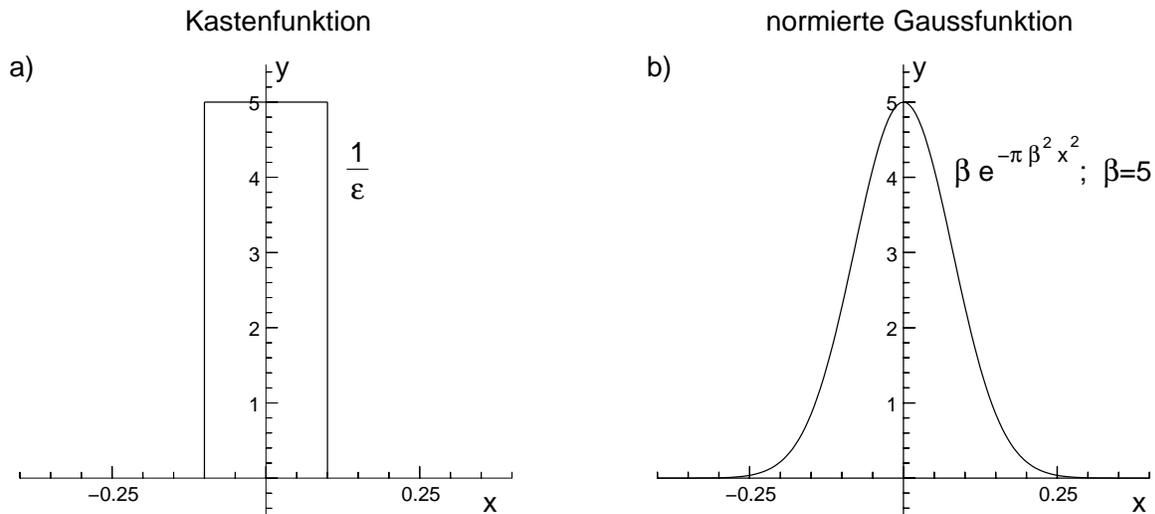


Abbildung 28: Links eine kastenförmige  $\delta$ -Funktion mit  $\delta(x) = 1/\varepsilon$  für  $x \in [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]$  und  $\varepsilon = 0.2$ . Rechts eine normierte Gaußfunktion  $\delta(x) = \beta \exp(-\pi \beta^2 x^2)$  mit  $\beta = 5$ . Beide erfüllen die Bedingung in Gl.(257).

Die  $\delta$ -Funktion ist nahezu überall '0' und nur in der Gegend von  $x = 0$  nimmt sie große Werte an, und zwar so, dass das Integral darüber gerade '1' ergibt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (258)$$

Zum Beispiel können wir die  $\delta$ -Funktion als einen hohen schmalen 'Kasten' der Breite  $\varepsilon$  und der Höhe  $1/\varepsilon$  auffassen, wie in Abb. 28a), so dass die Fläche innerhalb des Kastens =1 ist. Wir bezeichnen diesen mit  $\delta_\varepsilon(x)$ . Strebt die Breite  $\varepsilon$  des Kastens gegen  $\varepsilon \rightarrow 0$ , so bekommen wir einen  $\delta$ -förmigen Peak  $\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(x)$  für die nach Konstruktion  $\int \delta(x) dx = 1$  gilt.

**Definition:** Für die  $\delta$  Funktion gilt: Sie hat bei  $x \neq x_0$  den Wert '0' und auf stetige Funktionen  $f(x)$  besitzt sie die in Gl.(257) beschriebene Wirkung.

Ein wichtiges Anwendungsbeispiel ist die mathematische Beschreibung von im Raum verteilten Punktladungen. Einerseits sind Ladungen im Sinne der Elektrodynamik Punktladungen, andererseits möchte man diese Punktladungen durch eine Dichte beschreiben, also durch eine Größe  $\rho(x) = \text{Ladung/Volumen}$ . Wie sieht die Dichte einer Punktladung 'q' aus? Die Ladung sollte überall '0' sein bis auf die Stelle  $x_0$  und dort sollte gelten  $\int \rho(x)dx = q$ . Daher wird häufig die Dichte einer Verteilung von gleichen Punktladungen durch eine Summe  $\rho(x) = q \sum_i \delta(x - x_i)$  von  $\delta$ -Funktionen dargestellt.

Wie in Abbildung 28 bereits angedeutet, kann eine  $\delta$ -Funktion auch durch eine Folge stetiger Funktionen  $\delta_n(x)$  approximiert werden. Neben der Kastenfunktion kann die  $\delta$ -Funktion z.B. auch durch die im Abschnitt 6.11 betrachtete Gaußfunktion

$$\delta_n(x) := n \cdot e^{-\pi n^2 x^2} \quad (259)$$

genähert werden, wie sie in Abb. 28b) für  $n = 5$  dargestellt ist. Hierbei wurde die Gaußfunktion in Gl.(259) mit Hilfe des Integrals (237) bereits so normiert, da die Bedingung (257) erfüllt ist.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) dx = 1 \quad (\text{und } n > 0) \quad (260)$$

.  
(\*\*)\_

Daneben gibt es noch Darstellungen der  $\delta$ -Funktion durch Folgen stetiger Funktionen:

$$\delta_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{1 + n^2 x^2} \quad , \quad n \rightarrow \infty \quad (261)$$

$$\delta_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} \quad , \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (262)$$

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi} \left( \frac{\sin nx}{nx} \right)^2 \quad , \quad n \rightarrow \infty \quad (263)$$

$$\delta_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{nx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{+n} e^{ikx} dk \quad , \quad n \rightarrow \infty \quad (264)$$

.  
\_\*\*)

Darüber hinaus gibt es noch die sehr wichtige Darstellung der  $\delta$ -Funktion als Integral

$$\boxed{\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ik(x-x')},} \quad (265)$$

welche später noch im Zusammenhang mit Fourierintegralen weiter erläutert wird.

**Eigenschaft**  $\delta(bt) = \delta(t)/|b|$ : Nehmen wir erst einmal  $b > 0$  an. Zusammen mit Gl. (257) folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(bt)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t'}{b}\right)\delta(t')\frac{dt'}{b} = \frac{1}{b}f(0) = \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt, \quad (266)$$

wobei wir von der Substitution  $t' = bt$  Gebrauch machten. Da aber über die Funktion  $f(x)$  nichts Spezielles vereinbart wurde, gilt offensichtlich  $\delta(bt) = \delta(t)/b = \delta(t)/|b|$  für  $b > 0$ . Die Delta-Funktion ist laut Definition aber symmetrisch um Null herum:  $\delta(x) = \delta(-x)$ . Damit spielt das Vorzeichen von  $b$  keine Rolle. Da  $f(t)$  wieder beliebig ist, gilt also offenbar für alle reellen Werte von  $b (\neq 0)$

$$\delta(bt) = \frac{1}{|b|}\delta(t) \quad (267)$$

**Eigenschaften von  $\delta(h(t))$**  : Nun kann es vorkommen, dass  $\delta(\cdot)$  nicht von einer Variablen, sondern von einer Funktion wie  $h(t)$  abhängt. Da  $\delta(h(t))$  nur verschieden von Null ist, wenn das Argument  $h(t)$  verschwindet, sind nur die Nullstellen von  $h(t)$  wichtig. Im allgemeinen nimmt man stetige Funktionen  $h(t)$  an. In diesem Fall geht  $h(t)$  bei den jeweiligen Nullstellen  $t_i$  mit einer endlichen Steigung  $h'(t_i)$  durch Null. Wegen  $h(t_i) = 0$  ist, ist es in der unmittelbaren Nähe von  $t_i$  meistens eine lineare Funktion von  $t$  und in diesem Fall man kann die Näherung  $h(t) = h'(t_i)(t - t_i)$  machen. Die kann noch in die oben bekannte Form  $h(t) = b_i\tau$  unter Verwendung der Abkürzungen  $b_i = h'(t_i)$  und  $\tau = t - t_i$  gebracht werden. D.h. wir können die eben berechnete Regel (267) anwenden, und es folgt für eine stetige Funktion  $h(t)$  mit  $N$  einfachen Nullstellen  $t_i$

$$\delta(h(t)) = \sum_{i=1}^N \frac{\delta(t - t_i)}{|h'(t_i)|} . \quad (268)$$

**Die Ableitung  $\delta'(t)$**  : Die Ableitung einer Deltafunktion kann ebenfalls definiert werden, obwohl dies bei so kantigen Gebilden schwierig scheint. Bilden wir das Integral mit  $\delta'(t)$  und führen eine partielle Integration aus

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)dt &= [f(t)\delta(t)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\delta(t)dt \\ &= -f'(0) . \end{aligned} \quad (269)$$

Auf ähnliche Weise können auch höhere Ableitungen von  $\delta(t)$  definiert werden. Diese werden alle durch partielle Integration auf  $f(x)$  "abgewälzt". Entsprechend müssen für diesen Zweck höhere Ableitungen von  $f(x)$  an der Stelle  $x = 0$  existieren.

**Heaviside-Funktion** : Die Heaviside-Funktion oder Stufen-Funktion kann als Integral über die  $\delta$ -Funktion definiert werden

$$\Theta(x) = \int_{-\infty}^x \delta(x) dx \quad . \quad (270)$$

Mit den Eigenschaften von  $\delta(x)$  bedeutet dies

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad . \quad (271)$$

## 7.2 Zusammenfassung einiger Eigenschaften der $\delta$ -Funktion:

$\delta(\phi(x)) = 0 \quad , \quad \text{falls } \phi(x) \neq 0$ $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0)$ $\delta(x) = \delta(-x)$ $\int_{-\infty}^x dx' \delta(x') = \Theta(x) \quad (\text{Heavisidefkt.})$ $x \cdot \delta(x) = 0 \quad (272)$ $\delta(ax) = \frac{1}{ a } \delta(x)$ $\delta(\phi(x)) = \sum_i \frac{1}{ \phi'(x_i) } \delta(x - x_i)$ $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x - x_0) f(x) dx = -f'(x_0)$
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

## 8 Koordinatensysteme

Neben den bisher besprochenen kartesischen Koordinaten sind andere problemangepasste Koordinaten oft effektiver zur Beschreibung von Problemen. Als sehr gebräuchlich haben sich die bereits angesprochenen ebenen Polarkoordinaten erwiesen, mit denen sich z.B. Kreisbewegungen viel einfacher beschreiben lassen.

In drei Raumdimensionen sind Zylinderkoordinaten für zylindersymmetrische Probleme und Kugelkoordinaten für kugelsymmetrische Probleme oftmals die besser angepassten Koordinaten. Wir geben den Zusammenhang zwischen diesen und den kartesischen Koordinaten und auch die Transformationsformeln für die jeweiligen Integrale an.

### 8.1 Polarkoordinaten in zwei Dimensionen

Die Transformationsregel ist in Abschnitt 2.4 beschrieben und das Flächenelement in Abschnitt 6.10

Ein Wegelement  $ds$  entlang einer Raumkurve bestimmt sich nach den Regeln fürs Dreieck

$$\begin{aligned} ds^2 &= dr^2 + r^2 d\phi^2 \\ ds &= d\phi \sqrt{\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + r^2} \\ &= dr \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2} \end{aligned} \quad (273)$$

### 8.2 Zylinderkoordinaten

Das Analogon zu Polarkoordinaten in der Ebene sind Zylinderkoordinaten in drei Dimensionen.

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \\ y &= r \sin \phi \\ z &= z \end{aligned} \quad (274)$$

Das Volumenelement  $dV = dx dy dz$  in kartesischen Koordinaten nimmt in Zylinderkoordinaten die Form an

$$\boxed{dV = r dr d\phi dz = |J| dr d\phi dz,} \quad (275)$$

wobei sich die Jacobi-Determinante wie folgt berechnet

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \phi, z)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & r \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

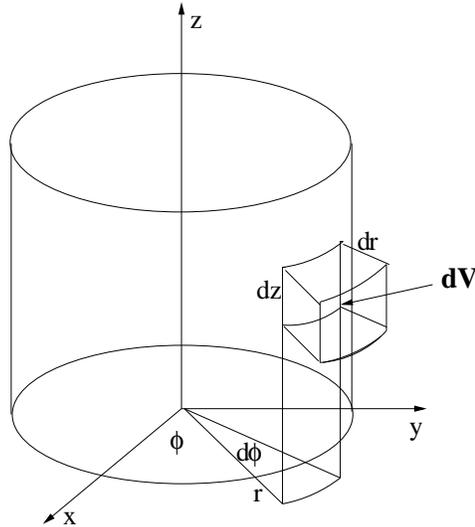


Abbildung 29: Zylinderkoordinaten: Aus der graphischen Darstellung des kleinen Volumenelementes ist sofort dessen Volumen ablesbar  $dV = r dr d\phi dz$ .

$$= \begin{vmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{vmatrix} = r(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = r \quad (276)$$

Das entsprechende Flächenelement ist auf der Mantelfläche  $dS = r d\phi dz$  und auf den Deckeln  $dS = r dr d\phi$ .

### 8.3 Kugelkoordinaten

Ein weiteres sehr wichtiges Koordinatensystem sind Kugelkoordinaten, wobei die kartesischen Komponenten  $x, y, z$ , wie folgt durch die Kugelkoordinaten  $r, \theta, \phi$  ausgedrückt werden.

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad (277)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi \quad (278)$$

$$z = r \cos \theta. \quad (279)$$

Will man die Vorteile dieser Koordinaten auch bei der Berechnung von Integralen ausnutzen, vor allem dort sind sie von Vorteil, so wird das Volumenelement noch benötigt. Hierfür berechnen wir die Jacobi-Determinante

$$|J| := \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix}$$

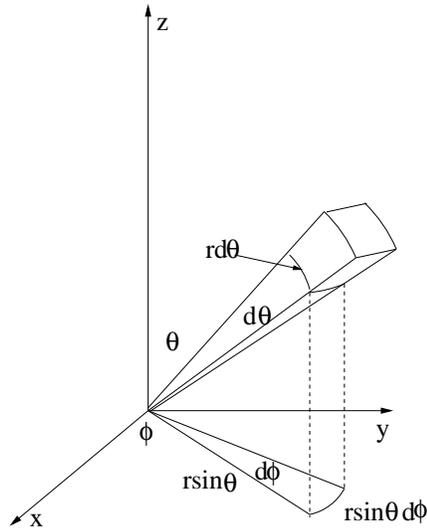


Abbildung 30: Kugelkoordinaten: Aus der graphischen Darstellung folgt unmittelbar das Volumenelement in Kugelkoordinaten  $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ .

$$\begin{aligned}
 &= \cos \theta \begin{vmatrix} r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \end{vmatrix} \\
 &\quad + r \sin \theta \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \end{vmatrix} \quad (280)
 \end{aligned}$$

Demzufolge ist das Volumenelement in drei Dimensionen in Kugelkoordinaten

$$\boxed{dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi} \quad (281)$$

und das Oberflächenelement ist

$$\boxed{dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi} \quad (282)$$

## 9 Vektoranalysis und Integralsätze

Neben Vektoren  $\mathbf{r}$  waren bisher skalare Funktionen  $f(x)$  von einer Variablen und von mehreren Variablen  $f(x, y, z)$  Gegenstand der Diskussion. Von mehreren Variablen abhängige Funktionen werden auch Felder genannt.

Eine Funktion  $f(x, y)$  beschreibt z.B. Flächen über einer Ebene. Eine Funktion  $f(x, y, z)$  beschreibt z.B. die Temperaturverteilung in einem Volumen.

Das Geschwindigkeitsfeld einer Wasser- oder Luftströmung hängt einerseits von allen Raumkoordinaten ab und andererseits ist die lokale Strömungsrichtung ein Vektor. Um diese Strömung oder die Verteilung von elektrischen Feldern zu beschreiben, braucht man anstelle von skalaren Funktionen Vektorfunktionen (auch Vektorfelder genannt), d.h. jede Komponente eines z.B. dreikomponentigen Vektors ist selbst wieder eine Funktion von den drei räumlichen Koordinaten.

### 9.1 Raumkurven und Vektorfelder

Raumkurven lassen sich durch einen Vektor darstellen, dessen Komponenten Funktionen einer Variablen (hier:  $u$ ) sind

$$\mathbf{v}(u) = (v_x(u), v_y(u), v_z(u)) \quad (283)$$

Man nennt dies auch die Parameterdarstellung der Raumkurve. Ein Beispiel für "glatte" Raumkurven ist die Kreisbahn in der Ebene,

$$\mathbf{r}(u) = r (\cos u, \sin u, 0) \quad (284)$$

oder die Schraubenbahn

$$\mathbf{r}(u) = (r \cos(u), r \sin(u), mu). \quad (285)$$

Eine interessante Frage bei Raumkurven betrifft die Weglänge von einem Punkt  $A$  nach  $B$  auf der Kurve. Hierfür ist der Tangentenvektor zur Kurve zu betrachten. Für die Kreisbahn ist

$$\frac{d\mathbf{r}}{du} = r (-\sin u, \cos u, 0) \quad (286)$$

tangential zur Kreislinie und diese Ableitung des Vektors hat die Länge  $|\frac{d\mathbf{r}}{du}| = r$ . Für die Schraubenlinie ist dies

$$\frac{d\mathbf{r}}{du} = (-r \sin u, r \cos u, m) \quad (287)$$

mit der Länge  $|\frac{d\mathbf{r}}{du}| = \sqrt{r^2 + m^2}$ . Damit definiert man den **Tangentenvektor**

$$\mathbf{t} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{du}}{\left| \frac{d\mathbf{r}}{du} \right|} \quad (288)$$

welcher ein Einheitsvektor mit der Länge "1" ist.

Für den Kreis liefert die Summation aller kleinen Wegstücke  $\left|\frac{d\mathbf{r}}{du}\right|$ , also das einfache Integral

$$\int_0^{2\pi} du \left|\frac{d\mathbf{r}}{du}\right| = \int_0^{2\pi} r du = 2\pi r, \quad (289)$$

den erwarteten Umfang eines Kreises. Wiederholen wir diesen Gedankengang zur Berechnung der Wegstrecke entlang der Schraubenlinie, so bekommen wir

$$\begin{aligned} \int_0^{\Theta_0} du \left|\frac{d\mathbf{r}}{du}\right| &= \int_0^{\Theta_0} du |(-r \sin(u), r \cos(u), m)| \\ &= \int_0^{\Theta_0} du \sqrt{r^2(\sin^2 u + \cos^2 u) + m^2} = \sqrt{r^2 + m^2} \Theta_0 \end{aligned} \quad (290)$$

Vektorfelder haben die Form

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, y, z) &= (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z)) \\ &= (v_x(x, y, z), v_y(x, y, z), v_z(x, y, z)) \end{aligned} \quad (291)$$

wobei die letzten beiden Schreibweisen synonym verwendet werden.

Die partielle Ableitung eines Vektor wirkt auf jede einzelne Komponente des Vektors z.B.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{v}(x, y, z) = \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_i}, \frac{\partial v_2}{\partial x_i}, \frac{\partial v_3}{\partial x_i} \right) \quad (292)$$

**Technisches Einschiesel** Es erweist sich auch noch eine andere Schreibweise von Vektoren als sehr nützlich

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3 \quad (293)$$

Hierbei sind  $\mathbf{e}_i$  (wobei  $i = 1, 2, 3$  oder  $i = x, y, z$  ist) die kanonischen Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$  in kartesischen Koordinaten. Sie sind so gewählt, dass sie orthogonal zueinander stehen und haben die Länge  $1 = |\mathbf{e}_i|$

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad (294)$$

wobei das **Kronecker-Symbol**  $\delta_{ij}$  folgende Eigenschaften hat

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}. \quad (295)$$

Manchmal werden in der Literatur auch andere Symbole für die Einheitsvektoren in drei Raumdimensionen genommen. Z.B.  $\mathbf{i} = \mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{j} = \mathbf{e}_y$  und  $\mathbf{k} = \mathbf{e}_z$ .

Aus 2 gegebenen Basisvektoren kann man sich den Dritten erzeugen

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2 \quad (\text{zyklisch}) \end{aligned} \quad (296)$$

Danach ist auch

$$\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) = \begin{cases} 1 & i, j, k \text{ zyklisch } \in \{1, 2, 3\} \\ -1 & i, j, k \text{ antizyklisch} \\ 0 & \text{sonstwie} \end{cases} \quad (297)$$

Diesen Sachverhalt können wir auch in einem Symbol zusammenfassen

$$\epsilon_{ijk} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) \quad , \quad (298)$$

und nennen  $\epsilon_{ijk}$  den total antisymmetrischen Tensor 3. Stufe. Dieses Symbol  $\epsilon_{ijk}$  ist einerseits Tensor, andererseits zahlenmäßig unabhängig vom Koordinatensystem.

## 9.2 Vektoroperatoren

Eine Reihe von Ableitungsoperationen wirken entweder auf skalare Felder oder Vektorfelder. Die wichtigsten dieser Operationen sind der *Gradient*, die *Divergenz* und die *Rotation*. Diese drei Operationen lassen sich nach strengen mathematischen Regeln definieren. Wir betonen aber im folgenden mehr die geometrische Bedeutung dieser Operatoren.

Hierfür ist der sogenannte Nabla-Operator  $\nabla$  von zentraler Bedeutung. Er wird durch folgenden Vektor dargestellt

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (299)$$

Wird dieser Operator auf ein Vektorfeld angewendet, so ist die Frage, ob dies als Skalarprodukt  $\nabla \cdot \mathbf{v}$ , als Vektorprodukt  $\nabla \times \mathbf{v}$  oder gar als Tensorprodukt  $\nabla \otimes \mathbf{v}$  erfolgt (siehe unten). Jede dieser Vektoroperationen hat eine andere physikalische Bedeutung.

### 9.2.1 Gradient eines skalaren Feldes

Der Gradient eines skalaren Feldes  $f(x, y, z) = f(\mathbf{r})$  ist

$$\nabla f(x, y, z) = \nabla f(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_x \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial z} \quad , \quad (300)$$

d.h.  $\nabla f$  ist ein Vektor, dessen Komponenten die partiellen Ableitungen von  $f(\mathbf{r})$  sind. Achtung:  $\nabla f$  ist nicht zu verwechseln mit  $f\nabla = (f\partial/\partial x, f\partial/\partial y, f\partial/\partial z)$ , was immer noch ein Operator ist.

Der Gradient eines Skalars hat einige interessante Eigenschaften. Nehmen wir als Beispiel ein Feld, das nur von  $(x, y)$  abhängt, dann beschreibt  $f(x, y)$  eine Fläche über der  $(x, y)$ -Ebene. Diese Fläche besitzt Linien "gleicher Höhen", auch Höhenlinien genannt, auf denen sich  $f(x, y)$  nicht ändert. Die stärkste Änderung von  $f(x, y)$  ist natürlich senkrecht zu diesen Höhenlinien.

Nehmen wir das Paraboloid über der Ebene  $f(x, y) = a(x^2 + y^2)$ . Der Gradient davon ist

$$\nabla f(x, y) = 2a(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y) = 2a\mathbf{r}. \quad (301)$$

In diesem Falle sind die Höhenlinien Kreise auf denen  $f(\mathbf{r})$  konstant ist. Die Richtung des stärksten Anstieges zeigt also radial nach außen oder für  $a < 0$  radial nach innen.

Ein weiteres Beispiel ist das Gravitationspotential  $f(\mathbf{r}) = -\frac{G}{r}$ , das radial zum Zentrum  $r = 0$  abnimmt. Der Gradient davon ist die Richtung des stärksten Anstieges des Potentials und sollte damit entgegengesetzt zur Richtung der Anziehungskraft (die zum Zentrum hin gerichtet ist) nach außen gerichtet sein. Dieses qualitative Argument rechnen wir nun einmal nach.

$$\nabla \frac{1}{r} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right), \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) \right) \quad (302)$$

Es reicht im ersten Schritt eine partielle Ableitung davon auszurechnen.

$$\partial_x \frac{1}{r} = \partial_x \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{1}{2} \frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (303)$$

Führt man die anderen drei Ableitungen auch noch aus und faßt zusammen

$$-G\nabla \frac{1}{r} = G \frac{x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = G \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (304)$$

so sieht man, dass der Gradient radial nach außen zeigt.

Analog sind Felder als Funktionen von drei Variablen vorstellbar. Mit  $f(x, y, z) = c$  sind Flächen definiert, auf denen der Funktionswert sich nicht ändert. Dann zeigt die Richtung des stärksten Anstiegs in Richtung des Gradienten, also in die Richtung von  $\nabla f$ . Mit dieser Aussage kann ein Vektor definiert werden, welcher senkrecht auf den Flächen  $f(x, y, z) = \text{const.}$  steht.

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \quad (305)$$

$\mathbf{n}$  wird der Normalenvektor zur Fläche  $f(\cdot) = \text{const.}$  genannt. Machen wir uns dies an einem einfach Beispiel deutlich. Mit  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$  sind Kugelschalen mit unterschiedlichen Radien  $a$  definiert. Der Gradient ist  $\nabla f(\cdot) = 2(x, y, z)$  und damit ist der Normalenvektor für eine Kugelschale

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2, y^2, z^2}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (306)$$

Das Feld  $\mathbf{f}(x, y, z)$  kann auch vektoriellen Charakter haben. Für jede Feldkomponente  $f_x, f_y$  oder  $f_z$  kann dann jeweils getrennt das jeweilige Gradientenfeld ermittelt werden. Dies ist wichtig zu unterscheiden von der Divergenz des Feldes, wie weiter unten angesprochen.

**Regeln** , die aus den Ableitungsregeln einfacher partieller Ableitungen folgen:

$$\begin{aligned} \text{grad}(\varphi + \psi) &= \text{grad}(\varphi) + \text{grad}(\psi) \\ \text{grad}(\varphi\psi) &= \nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi \end{aligned} \quad (307)$$

### 9.2.2 Divergenz eines Vektorfeldes

Die Divergenz eines Vektorfeldes  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(x, y, z)$  ist

$$\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (308)$$

eine skalare Größe. Die Divergenz ist ein Maß für die Stärke einer Quelle oder einer Senke. Dies wird durch Beispiele für Strömungsfelder verdeutlicht.

**Beispiele** Betrachten wir das einfache Vektorfeld (ohne weitere physikalische Bedeutung), bei dem alle Vektorpfeile vom Koordinatenursprung aus nach außen zeigen.

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \quad (309)$$

Die Divergenz dieses Feldes ist

$$\text{div } \mathbf{r} = \nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3 \quad (310)$$

Weitere Beispiele ist die Divergenz eines elektrischen Feldes um eine Ladung. Von der Ladung  $q$  zeigen je nach Vorzeichen von  $q$  die Vektorpfeile hin oder weg. Beim Wasserabfluss aus der Badewanne oder aus dem Waschbecken ist die Divergenz des Strömungsfeldes auch ganz offensichtlich. In beiden Fällen zeigen die Vektorpfeile der Geschwindigkeit zum Zentrum, da es sich um Senken handelt.

## Weitere Rechenregeln

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \operatorname{div}\mathbf{A} + \operatorname{div}\mathbf{B} \\ \operatorname{div}(\alpha \mathbf{A}) &= \alpha \operatorname{div}\mathbf{A} \quad (\alpha \text{ Zahl}) \\ \operatorname{div}(\varphi \mathbf{A}) &= \varphi \operatorname{div}\mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad}\varphi\end{aligned}\tag{311}$$

Nehmen wir an, das Vektorfeld  $\mathbf{v}$  ist über die Gradientbildung aus einem skalaren Feld  $f(x)$  entstanden:  $\mathbf{v} = \nabla f$ . Dann ergibt die Divergenz unter Ausnutzung von Orthogonalitätsrelation für die Einheitsvektoren (294)

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\nabla f) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f = \Delta f,\tag{312}$$

wobei durch das letzte Gleichheitszeichen der sogenannte **Laplace-Operator**  $\nabla \cdot \nabla = \Delta$  definiert ist. Dieser spielt in der Physik, Chemie und insgesamt in Natur und Technik, aber auch bei der Mathematik des Wertpapierhandels eine sehr wichtige Rolle.

### 9.2.3 Rotation eines Vektorfeldes

Die Rotation (im englischen *curl*) eines Vektorfeldes ist definiert durch

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z\tag{313}$$

Nehmen wir eine starre Rotation einer Flüssigkeit oder ähnliches. Wenn sich die gesamte Flüssigkeit mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit um eine Achse drehen soll, dann muss die Geschwindigkeit radial mit  $r$  zunehmen. Dies gibt ein ebenes Vektorfeld

$$\mathbf{v}(r, \varphi) = r\omega(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) = \omega(-y, x, 0) \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}\tag{314}$$

wie es in Abbildung 31 skizziert ist.

Bilden wir davon die Rotation, so ist

$$\nabla \times \mathbf{v} = (0, 0, 2)\omega\tag{315}$$

und die Rotationsachse zeigt entlang der positiven  $z$ -Achse.

Noch ein praktisches **Beispiel**:

Ein Flüssigkeit ströme in  $y$ -Richtung in einem (zweidimensionalen) Kanal, mit  $x$ -Koordinate quer zur Stromrichtung. Bei  $x=-1$  und  $x=1$  seien die Kanalwände. Das Geschwindigkeitsprofil der Strömung in  $y$ -Richtung sei gegeben als  $v_y = 1 - x^2$ , also 0 an jeder Kanalwand und 1 in der Mitte. (Dies ist übrigens tatsächlich ein typisches Strömungsprofil). Vektoriell schreibt sich dies als  $\mathbf{v} = (0, 1 - x^2, 0)$ . Die Rotation ergibt offenbar  $\nabla \times \mathbf{v} = (0, 0, -2x)$  wegen  $\frac{\partial v_y}{\partial x} = -2x$ . Dies entspricht völlig unserer Intuition: Denken wir uns je ein Schaufelrädchen am linken ( $x=-1$ ) und am rechten Kanalrand ( $x=+1$ ) im Strom, die Stromrichtung zeigt weg vom Betrachter in  $y$ -Richtung. Dann würde sich das linke Rädchen gegen den Uhrzeigersinn, das rechte im Uhrzeigersinn um die  $z$ -Achse drehen.

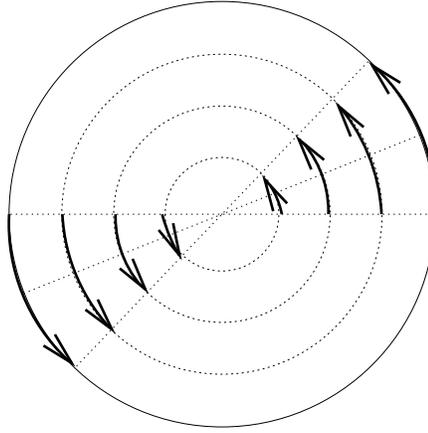


Abbildung 31: Starr rotierendes Vektorfeld. Der Betrag der Geschwindigkeit ist proportional dem Abstand vom Zentrum

**Rechenregeln für rot bzw.  $\nabla \times$**  Aus der Additivität der Ableitungsvorschrift  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  und der Produktregel können folgende oft benutzte Formeln abgeleitet werden

$$\begin{aligned}
 \text{rot}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \text{rot}\mathbf{A} + \text{rot}\mathbf{B} \\
 \nabla \times (\alpha\mathbf{A}) &= \alpha(\nabla \times \mathbf{A}) \quad (\alpha \text{ Zahl}) \\
 \nabla \times (\varphi\mathbf{A}) &= \varphi(\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla\varphi) \times \mathbf{A} \quad (\varphi \text{ skalares Feld}) \quad (316)
 \end{aligned}$$

Letzte Formel macht man sich z.B. deutlich, indem man die 1-te Komponente ableitet und dann zyklisch fortsetzt.

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times (\varphi\mathbf{A}))_1 &= \partial_2(\varphi\mathbf{A})_3 - \partial_3(\varphi\mathbf{A})_2 \\
 &= \varphi\partial_2A_3 + A_3\partial_2\varphi - \varphi\partial_3A_2 - A_2\partial_3\varphi \\
 &= \varphi(\partial_2A_3 - \partial_3A_2) + (\partial_2\varphi)A_3 - A_2(\partial_3\varphi) \\
 &= \varphi(\nabla \times \mathbf{A})_1 + (\nabla\varphi \times \mathbf{A})_1 \quad (317)
 \end{aligned}$$

### Anmerkung

1. Gradientenfelder sind stets wirbelfrei!

$$\text{rot}(\nabla\varphi) = \mathbf{0} \quad (\varphi \text{ 2-mal differenzierbar}) \quad (318)$$

2. Es gilt auch die Umkehrung: Wenn ein Vektorfeld  $\mathbf{A}$  wirbelfrei ist, d.h.  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ , dann muss es ein geeignetes Skalarfeld  $\varphi$  geben, so dass  $\mathbf{A}$  durch ein Gradientenfeld darzustellen ist

$$\mathbf{A} = \text{grad}\varphi. \quad (319)$$

In diesem Fall ist natürlich eine additive Konstante zu  $\varphi$  beliebig wählbar (Dies wird an anderen Stellen im Studium nochmals erklärt.)

3. Wirbelfelder sind stets quellenfrei

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = 0 \quad (\mathbf{A} \text{ zweimal diff.bar}) \quad , \quad (320)$$

denn  $\partial_i(\nabla \times A)_i = \partial_i \epsilon_{ijk} \partial_j A_k = \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k$  verschwindet weil die Ableitungen vertauschen  $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$ .

4. Auch gilt wieder die Umkehrung.

Wenn ein Vektorfeld  $\mathbf{B}$  quellenfrei ist, d.h.  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , dann muß es ein geeignetes anderes Vektorfeld  $\mathbf{A}$  geben, so daß  $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$  ist. In  $\mathbf{A}$  ist dann wieder ein additives Gradientenfeld frei.

## 9.3 Vektorintegration

Die einfachste Verallgemeinerung des Integralbegriffes auf Vektoren ist, wenn Integrale statt über eine gewöhnliche Funktion über eine vektorwertige Funktion **einer** Variablen betrachtet werden. In diesem Falle sind anstelle eines Integrales, 2,3 oder n Integrale über die einzelnen Vektorkomponenten zu berechnen und das Resultat ist wieder ein Vektor. Dies bedeutet für eine vektorwertige Funktion  $\mathbf{a}(t)$

$$\int dt \mathbf{a}(t) = \left( \int dt a_1(t), \int dt a_2(t), \int dt a_3(t) \right) \quad (321)$$

Die Rechenmethoden des einfachen Integrales übertragen sich offensichtlich auf das vektorielle Integral.

### 9.3.1 Kurvenintegrale

Ein physikalisch interessanter Integral-Typ sind Kurvenintegrale, bei dem verschiedene Felder entlang eines bestimmten Weges  $C$  von  $A$  nach  $B$  integriert werden. Es sind drei elementare Integrale vorstellbar

$$\int_C \phi d\mathbf{r}, \quad \int_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}, \text{ und } \int_C \mathbf{a} \times d\mathbf{r}, \quad (322)$$

wobei  $\phi = \phi(\mathbf{r})$  ein skalares Feld und  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$  ein Vektorfeld ist. Die Integrale selbst sind entweder Vektoren (im Fall 1 oder 3) oder Skalare wie im zweiten Fall. Der zweite Fall ist der in der Physik am häufigsten auftretende Fall.

Betrachten wir den Fall einer Masse im Gravitationsfeld. Die  $z$ -Achse zeige vom Erdmittelpunkt weg, dann hat die Erdanziehungskraft folgende Form  $\mathbf{K} = (0, 0, -mg)$  (ist wohl aus der Schule noch bekannt). Die Arbeit= Kraft mal Weg

$$\int_C \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} \quad (323)$$

ist in diesem Zusammenhang eine wichtige Größe. Vergleichen wir dieses Integral für zweierlei Wege. 1) entlang der  $z$ -Achse und 2) entlang der oben eingeführten Schraubenlinie  $\mathbf{r} = (r \cos(mz), \sin(mz), z)$ . In beiden Fällen ergibt das Integral

$$\int_C \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} = -mgz \quad (324)$$

und damit ist es völlig egal auf welchem Weg man die Höhe  $z$  erreicht. Diese Wegunabhängigkeit gilt für jedes Vektorfeld  $\mathbf{K} = \alpha \operatorname{grad}\varphi$ , welches sich mit einem Gradienten erzeugen läßt.

### 9.3.2 Flächen- und Oberflächenintegrale

Wie bei den Linienintegralen so können auch Integrale über Oberflächen sowohl Skalare wie Vektoren beinhalten. Den sehr einfachen Fall eines Integrales über einer ebenen Fläche  $\int f(x, y) dx dy$  haben wir bereits in Abschnitt 6.9 unter dem Begriff Mehrfachintegral kennengelernt.

Wie in Gl.(322) sind auch hier wieder verschiedene Typen von Oberflächenintegralen vorstellbar

$$\int_F \phi d\mathbf{S}, \quad \int_F \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}, \quad \int_F \mathbf{a} \times d\mathbf{S}, \quad (325)$$

wobei sich die Integrale über die Oberflächen  $F$  erstrecken. Handelt es sich z.B. um geschlossene Oberflächen, so wird häufig auch das Symbol  $\oint$  für das Integrationszeichen benutzt.

Das Vektordifferential  $d\mathbf{S}$  stellt ein Flächenelement  $dS$  aus der Oberfläche  $F$  dar und daraus wird mit dem Normalvektor  $\hat{\mathbf{n}}$  das Vektorflächenelement  $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}}dS$  gebildet.

Die physikalischen Beispiele für derartige Oberflächenintegrale sind zahllos. Das Integral  $\int_F \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}$  entspricht grob gesprochen einer Projektion. Man spricht in diesem Fall auch von einem Flussintegral. Stellen wir uns  $\mathbf{a} = \mathbf{v}$  als den Geschwindigkeitsvektor einer Flüssigkeit vor. Steht die Strömungsrichtung parallel zum Normalenvektor einer Fläche also senkrecht zur Fläche, so ist der Durchfluss durch die gedachte Fläche optimal. Sind die beiden Vektoren orthogonal zueinander,  $\mathbf{v} \perp \hat{\mathbf{n}}$ , so verschwindet der Fluss durch die Fläche.

Sehen wir uns hierzu das Integral  $I = \int_F \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}$  mit  $\mathbf{a} = x\mathbf{e}_x$  auf die Oberfläche der oberen Halbkugel eingeschränkt an:  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  mit  $z \geq 0$ . Der Normalenvektor zur Kugeloberfläche ist  $\hat{\mathbf{r}} = \sin\theta \cos\phi\mathbf{e}_x + \sin\theta \sin\phi\mathbf{e}_y + \cos\theta\mathbf{e}_z$ , und  $x = a \sin\theta \cos\phi$ . Damit wird aus dem Integral

$$\begin{aligned} I &= \int_F \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \int_F (a \sin\theta \cos\phi)(\sin\theta \cos\phi)(a^2 \sin\theta d\theta d\phi) \\ &= a^3 \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^3\theta \int_0^{2\pi} d\phi \cos^2\phi \end{aligned}$$

$$= a^3 \left[ -\cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{\pi/2} \left[ \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \phi) \right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi a^3}{3} \quad (326)$$

Natürlich hätten wir dieses Integral auch in kartesischen Koordinaten ausführen können, aber es wäre wieder aufwendiger gewesen.

Betrachten wir das Vektoroberflächenintegral  $\mathbf{S} = \int_F d\mathbf{S}$  ebenfalls auf der oberen Halbkugeloberfläche  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  mit  $z \geq 0$ . Aus dem letzten Beispiel sind praktisch schon alle Zutaten bekannt.

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \int_F a^2 \sin \theta \hat{\mathbf{r}} d\theta d\phi, \\ &= a^2 \mathbf{e}_x \left( \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta \right) + a^2 \mathbf{e}_y \left( \int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta \right) \\ &\quad + a^2 \mathbf{e}_z \left( \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \right) \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{0} + \pi a^2 \mathbf{e}_z = \pi a^2 \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (327)$$

Dies ist nichts anderes als die auf die  $x - y$  Ebene projizierte Fläche der Halbkugeloberfläche. Würde das Integral über die gesamte Kugeloberfläche ausgeführt werden, so würde das Vektoroberflächenintegral verschwinden, also  $\oint_F d\mathbf{S} = 0$ .

### 9.3.3 Integralsätze von Gauß und Stokes

In diesem Abschnitt beleuchten wir den Zusammenhang zwischen Integralen über Vektorfelder und der Ableitung, dem Nabla-Operator. Aufgrund dieses Zusammenhanges werden nützliche Umformungen verschiedener Integrale möglich. Diese Umformungen werden mittels der Integralsätze von Gauß und Stokes gemacht, wobei wir nur die Grundidee des Satzes von Gauß näher beleuchten. Dem Gaußschen Satz kommt bei der Vektorintegration eine ähnliche Bedeutung wie die partielle Integration bei gewöhnlichen Funktionen zu.

Dieser Satz verbindet die Divergenz eines Vektorfeldes, also das Maß für die Stärke einer Quelle oder Senke mit einem Oberflächenintegral über ein Vektorfeld um diese Quelle oder Senke.

Betrachten wir ein Vektorfeld an einer Stelle  $\mathbf{r}$  und um diesen Ort einen kleinen Quader mit dem Volumen  $\Delta V$  und der (geschlossenen Oberfläche)  $\Delta F$ .  $\Delta V$  kann eigentlich eine beliebige "Kartoffel" sein, nur sollte die Oberfläche von  $\Delta V$  glatt sein. Aber damit die Angelegenheit noch etwas einfacher und anschaulicher wird, nehmen wir für  $\Delta V$  einen Würfel an.

Wir betrachten nun mit

$$\frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta F} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (328)$$

den Fluß von  $\mathbf{A}$  durch die Oberfläche von  $\Delta V$ , wobei  $d\mathbf{S}$  senkrecht auf den Seitenflächen steht (S='surface').

Summieren wir nun die Integrale über die 6 Oberflächen auf

$$\begin{aligned} \oint_{\Delta F} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \int_{\Delta F_x} A_1(x + \Delta x, y', z') dy' dz' \\ &\quad - \int_{\Delta F_x} A_1(x, y', z') dy' dz' \\ &\quad + \text{die Integrale über die anderen 4 Seitenflächen.} \end{aligned} \quad (329)$$

Das "Minus" Zeichen auf der rechten Seite kommt daher, dass auf der Seite bei  $x$  der Normalenvektor in die entgegengesetzte Richtung zeigt wie auf der Fläche bei  $x + \Delta x$ . Wir gehen natürlich wieder davon aus, daß das Vektorfeld in allen drei Komponenten stetig differenzierbar ist. Mit dieser Eigenschaft können wir  $A_1$  um  $x$  entwickeln (Taylorentwicklung bis zur 1. Ordnung)

$$A_1(x + \Delta x, y', z') \sim A_1(x, y', z') + \frac{\partial A_1}{\partial x}(x, y', z') \Delta x \quad . \quad (330)$$

Damit können wir (329) umformen

$$\oint_{\Delta F} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \Delta x \int_{\Delta y \Delta z} \frac{\partial A_1}{\partial x}(x, y', z') dy' dz' = \frac{\partial A_1}{\partial x}(x, \tilde{y}, \tilde{z}) \Delta x \Delta y \Delta z + \text{andere Oberfl.}$$

wobei  $\tilde{y}$  und  $\tilde{z}$  Werte aus dem Quader  $\Delta V$  sind. Für den Spezialfall des kleinen Quaders folgt damit insgesamt

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta F} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

Im Limes  $\Delta V \rightarrow 0$  spielt es auch gar keine Rolle, um welche Gestalt des Volumens es sich dabei handelte.

Was wir für ein Teilvolumen machten, können wir nun für viele aneinanderliegende Volumina auch machen. Starten wir mit zwei aneinanderliegenden Volumina.

$$\frac{1}{\Delta V_1} \oint_{\Delta F_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{\Delta V_2} \oint_{\Delta F_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}_1) + \text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}_2) + \text{Rest} \quad (331)$$

Über die gemeinsame Fläche  $F_g$  beider Volumina wird nun in beiden Fällen integriert. Da allerdings der Normalenvektor auf  $F_g$  in entgegengesetzte Richtung zeigt, wenn

über  $\Delta V_1$  oder über  $\Delta V_2$  integriert wird (Normalenvektoren zeigen immer vom Volumen weg) und heben sich dadurch weg.

Dies kann man nun für viele Volumina wiederholen und wir erhalten

$$\oint_{\Delta F_V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^n \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) \Delta V_i + \text{Rest} \quad (332)$$

Im Limes kleiner Volumina verschwindet der "Rest" und die Summe geht in ein Integral über und wir erhalten somit den Satz von Gauß:

$$\boxed{\oint_{\Delta F_V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV} \quad (333)$$

(Achtung: Das Skalarprodukt links verwendet die Komponente des "Stromes  $\mathbf{A}$ " in Richtung parallel auf die Flächen-Normale  $d\mathbf{S}$ , die Normale steht senkrecht auf dem Flächenelement  $dS$ . Die rechts stehende Divergenz des Stromes  $\mathbf{A}$  ist natürlich eine skalare Grösse).

Durch diesen Satz werden die Quell- oder Senkenstrken des Feldes  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  im *Inneren* eines Volumens mit den Eigenschaften auf der *Oberfläche*, also dem Fluss durch die Oberfläche verknüpft. Die physikalische Bedeutung ist damit klar. Aber dieser Satz spielt auch mathematisch und für praktische Rechnungen eine bedeutende Rolle.

Der **Integralsatz von Stokes** betrifft den Zusammenhang zwischen einem Integral über die Rotation eines Vektorfeldes in einer Fläche, und dem Umlauf-Integral über die Begrenzungslinie dieser Fläche (S='surface'):

$$\boxed{\oint_{\text{Randlinie}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\text{Fläche}} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}} \quad (334)$$

Das Skalarprodukt im Integral auf der linken Seite verwendet also die Komponente des Feldes  $\mathbf{A}$  in Richtung parallel zum Integrationsweg entlang der Randlinie  $d\mathbf{r}$ . Im Integral auf der rechten Seite wird die Rotation des Feldes  $\mathbf{A}$  verwendet, die parallel zur Normalen  $d\mathbf{S}$  auf die Fläche  $S$  steht, also senkrecht auf dem Flächenelement  $dS$ . Das Integral über die Fläche wird also durch ein Integral über den Rand ersetzt.

Man stelle sich dazu einfach eine Menge kleiner gleichsinnig rotierender Wirbel in einem Flächenelement vor. Im Inneren des Flächenelements kompensieren sich die dort gegeneinanderlaufenden Strömungslinien der kleinen Wirbel zu Null, nur der Beitrag der Randlinie bleibt bei solcher gleichsinniger Rotation übrig.

Eine typische Anwendung des Stokesschen Satzes ist der Beweis, dass das Umlaufintegral (linke Seite des Stokes-Satzes) über eine Kraft dann Null wird, wenn die Kraft aus einem Potential  $\phi$  abgeleitet ist,  $\mathbf{A} \sim \operatorname{grad} \phi$ , da  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi = 0$ .

## 9.4 Laplace-Operator

Der Laplace-Operator in *einer* Dimension ist nichts anderes als die zweite Ableitung nach dem Ort, hier angewandt auf irgendeine Funktion  $f(x)$ :

$$\Delta f(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) \quad (335)$$

Seine große Bedeutung in der gesamten Physik und den Nachbarwissenschaften hat folgenden Grund. Nehmen wir an,  $f(x)$  beschreibe die Höhe der Oberfläche einer Flüssigkeit über einer Ebene. Dann will die Oberflächenspannung, aber auch die Schwerkraft, die Oberfläche "glatt" ziehen. Wir können also annehmen (und im Studium später noch herleiten), dass solche Kräfte so lange wirken, wie die Oberfläche nicht völlig glatt ist. Die zweite Ortsableitung, der Laplace-Operator also, ist aber gerade dann von Null verschieden, wenn eine Welligkeit von  $f(x)$  vorliegt, und ändert sein Vorzeichen, wenn die lokale Krümmung von  $f(x)$  ihr Vorzeichen ändert. Der Laplace-Operator hat also gerade die gewünschte Symmetrie-Eigenschaft, die "Kraft" ist dann proportional zum Laplace-Operator angewandt auf  $f(x)$ .

In drei Dimensionen hatten wir den Laplace-Operator oben schon kurz kennengelernt:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f = \Delta f, \quad (336)$$

Alle "Kräfte", die darauf hinwirken, dass Inhomogenitäten in einem dreidimensionalen System ausgeschmiert werden, werden meist vom Laplace-Operator begleitet. Hierzu gehören alle Arten von Diffusionsprozessen (Entropie!), aber auch Quanten-Effekte, die durch die Schrödingergleichung beschrieben werden. Nahezu jede Art "lokaler" Information in der Natur wird im Laufe der Zeit über grössere Bereiche verteilt, und unterliegt dem Laplace-Operator.

Wir haben den Laplace-Operator hier nur in kartesischen Koordinaten aufgeschrieben. In Kugel- oder Zylinder-Koordinaten sieht er leider gar nicht mehr so schön aus. Ein Grossteil der mathematisch-physikalischen Bemühungen in den kommenden Semestern wird der Lösung von partiellen Differentialgleichungen mit Laplace-Operatoren in krummlinigen Koordinatensystemen gelten.

# 10 Lineare Systeme

## 10.1 Allgemeines

Unsere Erfahrungen mit der uns umgebenden Welt gründen sich vielfach auf Proportionalitäten: "Doppelte Kraft ergibt doppelte Wirkung". Warum dies so häufig der Fall ist, lässt sich angesichts der chaotischen atomaren Bewegungen physikalisch gar nicht so leicht erklären (Ohmsches Gesetz, Hookesches Gesetz, etc). Anschaulich läßt sich diese Beobachtung noch am ehesten durch eine Symmetrieüberlegung begründen: Ändert sich nur das Vorzeichen der "Wirkung", falls sich das Vorzeichen der "Kraft" ändert, so geht die Kraft-Wirkung-Beziehung typischerweise **linear** durch den Ursprung. Wären im übrigen nicht viele Prozesse wenigstens annähernd linear in diesem Sinne, so würden wir heute nicht sehr viel über unsere Welt wissen. Die meisten der folgenden Kapitel beschäftigen sich darum mit linearen Systemen.

Es ist vielfach nützlich, Probleme auf eine gewisse "einfache" Form zu bringen, bevor man sich an die eigentliche Lösung des Problems macht. Lineare Probleme - die wir nunmehr in einiger Breite behandeln wollen - werden wir soweit möglich versuchen, in Matrix-Form zu schreiben. Die einfachste Form eines linearen Problems ist dann die sogenannte **Diagonalform** der Matrix: *Lineare Probleme werden durch Diagonalisieren meist so einfach, dass die Lösung offensichtlich wird.* (Was dieses Diagonalisieren bedeutet, soll im folgenden erläutert werden). Man nennt diese Diagonalisierung auch das **Eigenwert-Problem**, wobei die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der Matrix des linearen Problems zu bestimmen sind.

Zunächst müssen wir uns aber mit einigen Vorübungen zu Matrix- und Vektoroperationen beschäftigen. Wir werden nämlich weiter unten Funktionen auch einfach als Vektoren in hochdimensionalen Räumen betrachten.

## 10.2 Funktion als Vektor in hochdimensionalem Raum

Wir haben schon im Abschnitt 'Taylor-Entwicklung' eine Funktion näherungsweise durch einen Satz von Entwicklungskoeffizienten  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  dargestellt. Wir können aber auch einfach die Funktionswerte  $f_n$  einer Funktion  $f(x)$  an den Stellen  $x = na$  mit festem Wert  $a$  (z.B.  $a = 1$ ) als Näherungsdarstellung für eine Funktion benützen, also

$$f \approx \{f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\} \quad (337)$$

wie in Abb. (32) dargestellt ist.

Diese 'n' Werte können wir auch als die 'n' Komponenten eines n-dimensionalen Vektors  $\vec{f} = \{f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\}$  auffassen.

Damit haben wir also eine Funktion insgesamt als einen einzigen Punkt in einem n-dimensionalen Raum dargestellt. Damit dies für eine kontinuierlich mit  $x$  variierende

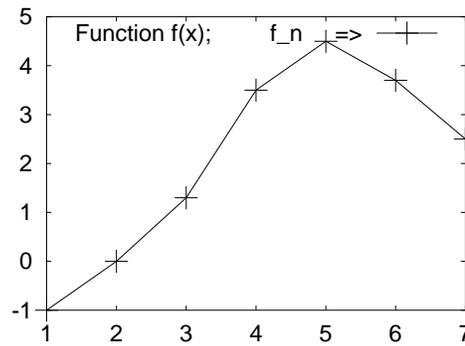


Abbildung 32: Funktion  $f(x)$  wird genähert durch beispielsweise die Funktionswerte  $f_n$  an den Stellen  $x = a_n$  mit  $a = 1$ .

Funktion  $f(x)$  sinnvoll ist, muss natürlich dieser Raum ziemlich hochdimensional sein, es ist also eigentlich der Limes 'n gegen Unendlich' zu betrachten.

Der Vorteil dieser Sichtweise ist dann, dass eine fast beliebige Transformation der Funktion  $f(x)$  einfach als Übergang von einem Punkt  $\vec{f}_A$  zu einem anderen Punkt  $\vec{f}_B$  in diesem Raum verstanden werden kann. Insbesondere werden wir es mit Drehungen solcher Vektoren zu tun haben.

### 10.3 Drehung von Vektoren

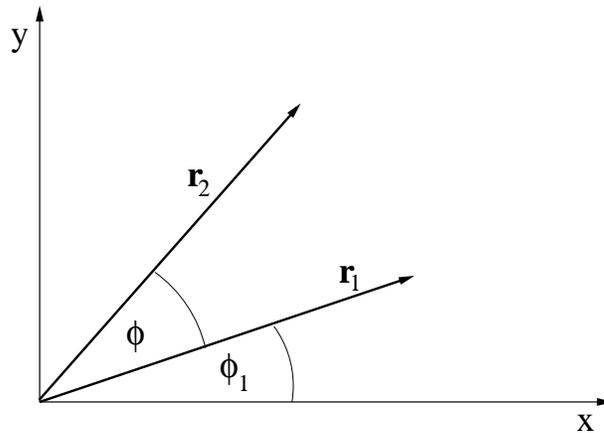


Abbildung 33: Drehung eines Vektors in der Ebene um den Winkel  $\phi$

Mit der Translation wurde bereits im Abschnitt 2 eine einfache Transformation eines Vektors beschrieben. Eine weitere Transformation, welche die Länge des Vektors unverändert läßt, ist z.B. eine Rotation von  $\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2$ , wie Abbildung 33 dargestellt.

Diese Drehung läßt sich kompakt in Polardarstellung komplexer Zahlen beschreiben.

$$\mathbf{r}_1 = r e^{i\phi_1}$$

$$\mathbf{r}_2 = r e^{i\phi_2} \quad (338)$$

Wenn  $\mathbf{r}_2$  aus  $\mathbf{r}_1$  durch eine Drehung hervorgeht, dann ist der Drehwinkel  $\phi$  sofort offensichtlich

$$\phi = \phi_2 - \phi_1, \quad \text{mit} \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 e^{i\phi}. \quad (339)$$

Dieses Ergebnis in kartesischen Koordinaten gibt zwei Gleichungen für die einzelnen Komponenten

$$x_2 = \cos(\phi) x_1 - \sin(\phi) y_1 \quad (340)$$

$$y_2 = \sin(\phi) x_1 + \cos(\phi) y_1 \quad (341)$$

Diese Gleichungen in Matrixschreibweise umformuliert ergeben

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ +\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}. \quad (342)$$

Dies kann noch kompakter in der Form

$$\mathbf{r}_2 = \mathcal{A} \mathbf{r}_1, \quad (343)$$

geschrieben werden, wobei sich die Definition von  $\mathbf{r}_i$  und  $\mathcal{A}$  aus dem Vergleich der beiden vorangehenden Gleichungen ergibt. Die Determinante der Drehmatrix  $\mathcal{A}$  ist

$$\det(\mathcal{A}) = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1. \quad (344)$$

Die Determinante von Matrizen, die Vektoren im Raume drehen und die Länge unverändert lassen haben den Wert "1". Die Matrizen nennt man Drehmatrizen.

Wird im dreidimensionalen Raum die Drehachse als die  $z$ -Achse gewählt, so ist die Darstellung der Drehung im drei Dimensionen

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ +\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad (345)$$

analog zu der Drehung in der Ebene.

## 10.4 Matrixmultiplikation

Wird nach der ersten Drehung  $\mathbf{r}_2 = \mathcal{A} \mathbf{r}_1$  noch die zweite Drehung mit der Drehmatrix  $\mathcal{B}$  ausgeführt, so führt dies auf ein Produkt von Matrixen  $\mathbf{r}_3 = \mathcal{B} \mathbf{r}_2 = \mathcal{B} \mathcal{A} \mathbf{r}_1$ . Da die Drehung auch in einem Schritt  $\mathbf{r}_3 = \mathcal{C} \mathbf{r}_1$  möglich ist, ergibt sich offensichtlich die Matrix der Gesamtdrehung als Produkt der beiden Matrizen für die Einzeldrehungen  $\mathcal{C} = \mathcal{B} \mathcal{A}$ .

Das Produkt von Matrizen läßt explizit für die Matrixelemente  $\mathcal{A}_{ij}, \mathcal{B}_{ij}, \mathcal{C}_{i,j}$  ( $i,j = 1, 2$ ) angeben

$$\mathcal{C}_{ij} = \sum_{k=1}^n \mathcal{A}_{ik} \mathcal{B}_{kj} \quad i, j = 1, \dots, n \quad \text{hier mit } n = 2 \quad (346)$$

Konkret ist  $\mathcal{A}$  nach obiger Vereinbarung eine Funktion von  $\phi$  und die Drehmatrix  $\mathcal{B}$  ist

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (347)$$

Mit der Regel für die Matrixmultiplikation und den Winkeladditionsregeln für  $\sin(\cdot)$  und  $\cos(\cdot)$  wird daraus die explizite Form von  $\mathcal{C}$

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi & -\cos \theta \sin \phi - \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \phi) & -\sin(\theta + \phi) \\ \sin(\theta + \phi) & \cos(\theta + \phi) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (348)$$

Diese zusammengesetzte Drehung um eine Drehachse ist wie erwartet tatsächlich auch in der Matrixdarstellung eine Addition der Drehwinkel. In Falle zweier Drehung um die gleiche Achse können die Drehungen und damit die Multiplikation der Matrizen  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  sogar miteinander vertauscht werden. Im allgemeinen ist das **Produkt von Matrizen nicht vertauschbar** (nicht kommutativ).

## 10.5 Transponierte, inverse und orthogonale Matrizen

Zur jeder  $n \times n$  Matrix  $\mathcal{A}$  gibt es eine transponierte Matrix  $\mathcal{A}^T$ .  $\mathcal{A}^T$  wird aus  $\mathcal{A}$  erzeugt indem die Matrixelemente an der Diagonale gespiegelt werden. Die Transponierte der oben in Gl.(342) definierten Drehmatrix ist

$$\mathcal{A}^T = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (349)$$

Eine Matrix heißt invers zur Matrix  $\mathcal{A}$ , wenn das Produkt mit dieser die Einheitsmatrix  $\mathcal{I}$  ergibt. Die Einheitsmatrix hat nur "1"-en auf der Diagonale und die restlichen Matrixelemente verschwinden. Die folgende Matrix-Bestimmungsgleichung für  $\mathcal{A}^{-1}$

$$\mathcal{A}^{-1} \mathcal{A} = \mathcal{I} \quad (350)$$

ist bei  $2 \times 2$  Matrizen äquivalent mit 4 linearen Gleichungen für die 4 Matrixelemente von  $\mathcal{A}^{-1}$ .

Ist nun die Ausgangsmatrix

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (351)$$

so wird die inverse Matrix  $\mathcal{M}^{-1}$  nach obiger Aussage (350) aus den vier Gleichungen für die vier Matrixelemente aus folgender Bedingung

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (352)$$

bestimmt. In Gleichungen umgeschrieben ergibt dies nach Ausführung der Matrixmultiplikation

$$\begin{aligned} av_1 + cv_2 &= 1, & bv_1 + dv_2 &= 0, \\ av_3 + cv_4 &= 0, & bv_3 + dv_4 &= 1. \end{aligned} \quad (353)$$

Eliminiert man zuerst  $v_3$  und  $v_1$ , so folgen unmittelbar zwei Ausdrücke  $v_4$  und  $v_2$ .  $v_3$  und  $v_1$  werden aus den dann bekannten Werten für  $v_4$  und  $v_2$  bestimmt. Insgesamt bekommt man für die Unbekannten  $v_i$  und damit für die inverse Matrix

$$\mathcal{M}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (354)$$

Für obige Drehmatrix ist damit

$$\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^T = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (355)$$

Die Äquivalenz von  $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^T$  zeichnet die Drehmatrizen aus. Diese Eigenschaft zusammen mit  $\det(\mathcal{A}) = 1$  definiert die sogenannten *orthogonalen* Matrizen.

## 11 Eigenwerte und Eigenvektoren von $2 \times 2$ Matrizen

### 11.1 Allgemeines

Die wichtigste Methode, lineare Aufgaben zu behandeln, ist die Lösung des sogenannten **Eigenwert**-Problems. Eine Raumschiffbesatzung, um ein einfaches Beispiel zu nennen,

habe ein unbekanntes Flugobjekt entdeckt und meldet der Bodenstation dessen Richtung (relativ zur Orientierung des Raumschiffs) und dessen sichtbare Abmessungen. Um damit auf der Bodenstation vernünftig umgehen zu können, müssen offensichtlich die vom Raumschiff aus gemessenen Koordinaten des Objektes auf das "Eigensystem" der Bodenstation übertragen werden. Die mathematischen Operationen sind in der Regel Drehungen des Koordinatensystems, gelegentlich auch noch Streckungen oder Stauchungen, sowie Verschiebungen. Ein detaillierteres Beispiel ist weiter unten unter "Hauptachsen-Transformation" mathematisch genauer ausgeführt.

Hier ist die Rolle der Koordinaten in zwei oder drei Raumdimensionen offensichtlich. Die Mächtigkeit der Eigenwert-Analyse zeigt sich aber erst richtig, wenn wir die Definition eines Koordinatensystems verallgemeinern. Als unabhängige Koordinaten oder Dimensionen eines Systems werden wir alle voneinander unabhängig bestimmbaren Variablen verwenden.

Anschaulich wird dies, wenn wir eine beliebige Funktion  $f(x)$  bezüglich  $x$  diskretisieren. Dazu setzen wir  $x = n*a$  mit  $n$  als ganzzahlig und  $a$  als eine kleine Längeneinheit. Dann können wir schreiben  $f(x) \approx f(n*a) \equiv f_n$ . Die Funktion  $f_n$  ist also jetzt nur noch an den Stützstellen  $x = n*a$  definiert. Wir nehmen aber an, dass  $a$  klein genug gewählt ist, sodass  $f_n$  eine gute Näherung für  $f(x)$  im ganzen Intervall  $(n-1)*a < x < n+1*a$  ist, so dass wir unbedenklich  $f(x)$  durch  $f_n$  ersetzen können. Solange wir nichts über den Verlauf von  $f_n$  wissen, müssen wir andererseits annehmen dürfen, dass  $f_n$  nichts mit dem eigentlich "benachbarten" Wert  $f_{n+1}$  zu tun hat. Die Werte  $f_n$  für verschiedene  $n$  sind damit genauso unabhängig voneinander (zu betrachten), wie verschiedene Koordinaten (Länge, Breite, Höhe; Temperatur, Luftdruck) der Position und des Zustandes eines Flugobjektes.

Nehmen wir, um konkret zu werden, an,  $f_n$  sei die Auslenkung einer Gitarrenseite am Ort  $x$  zwischen den beiden Einspannpunkten. Wenn  $a$  z.B. ein zehntel Millimeter ist, und  $n$  Werte von Null bis 5.000 annehmen kann, dann könnten wir die Auslenkung einer Gitarrensaite von 50 cm Länge im Zehntelmillimeterabstand genau lokalisieren. Die typischen Schwingungen einer Gitarrenseite sind sinus-artige Auslenkungen, wobei zwischen den Einspannpunkten eine beliebige Anzahl von "Knoten" liegt, an denen die Saite nicht ausgelenkt ist, während sich dazwischen Schwingungsbäuche befinden, an denen die jeweilige Auslenkung kurzzeitig maximal ist. Beschreiben wir die Gitarrenseite nun mittels unserer 5000 Stützstellen, so können wir offenbar bis zu 5000 Schwingungsbäuche damit erfassen, bzw. 4999 Knoten. Je kürzer die Wellenlängen auf der Saite, umso höher (proportional) der Ton. Bei einer (hypothetischen) Grundfrequenz von 10 Hertz würden die kürzesten Wellen (man nennt das in der Physik auch "Moden") mit 50000 Hertz schwingen, also deutlich jenseits der menschlichen Hörgrenze. Diese sinus-artigen Schwingungen der Saite, die also jeweils einem ganz bestimmten Ton entsprechen, sind dann die "Eigenschwingungen" der Saite. Sie stellen koordinierte Auslenkungen aller  $n = 1..5000$  Punkte  $f_n$  der Saite dar.

Fassen wir die einzelnen Amplituden  $f_n$  nun jeweils als Achsenabschnitt der Koordinate  $n$  auf, dann lässt sich eine solche Eigenschwingung einfach als die geradlinige Bewegung eines Punktes im 5000-dimensionalen Raum der  $f_n$  auffassen, immer hin und her durch den Ursprung. Die Richtung der Bewegung in diesem Raum ist dann der **Eigenvektor**, die Frequenz wird sich als **Eigenwert** herausstellen.

Fast alle(!) praktisch auftretenden linearen Probleme (und sogar viele nichtlinearen Probleme) nehmen ihre einfachst mögliche Form (wenn nicht sogar ihre Lösung) dann an, wenn das zugehörige Eigenwertproblem gelöst ist. Anwendungen gibt es in allen Bereichen der Naturwissenschaften, der Technik, und der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften. Wenn unser Ohr akustische Schwingungen aufnimmt, so fasst das Innenohr diese als weitgehend lineare Überlagerungen von Schwingungen jeweils einer ganz bestimmten Frequenz auf. Linear, da offenbar eine Veränderung der Lautstärke nicht gleich eine Veränderung der Tonhöhen bewirkt. Ähnliches gilt für alle Arten mechanischer und elastischer Schwingungen. Auch die Spektralzerlegung von farbigem Licht in einem Prisma entspricht der Rückführung auf die Eigenfrequenzen der Lichtquelle. Bei einem Laser kann dies z.B. nur eine einzige Frequenz sein. Entsprechend ist die Elektrodynamik eine lineare Theorie. Schliesslich ist die Quantenmechanik eine lineare Theorie (Superpositionsprinzip), und selbst weite Teile der Thermodynamik und der Statistischen Physik (lineare Response-Theorie) lassen sich mit linearen Methoden erfassen. Die Eigenwert-Lösung gelingt dabei zwar nicht immer analytisch, effiziente Eigenwert-Programmpakete gibt es aber praktisch für alle Programmiersprachen und Computersysteme.

## 11.2 2 x 2 Matrizen

Bevor wir in die Betrachtung solcher hochdimensionalen Systeme einsteigen, wollen wir erst ein einfaches Problem mit zwei Freiheitsgraden behandeln. Das ganze schreiben wir gleich in Matrix-Form.

Die folgende Gleichung für die Matrix  $\mathcal{M}$  und den Vektor  $\mathbf{r}$

$$\mathcal{M}\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r} \tag{356}$$

wird *Eigenwertgleichung* genannt, welche für eine  $2 \times 2$  Matrix die Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{357}$$

annimmt. Bringt man alles auf eine Seite so folgt das homogene Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \tag{358}$$

Diese Gleichung hat nur Lösungen  $x, y \neq 0$ , wenn die Determinante der Matrix verschwindet. Die Determinante der Matrix führt auf ein Polynom 2-ten Grades

$$\begin{aligned}(a - \lambda)(d - \lambda) - cb &= 0, \\ \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - cb &= 0.\end{aligned}\tag{359}$$

Die beiden Lösungen dieses quadratischen Polynomes sind die beiden *Eigenwerte* der Matrix  $\mathcal{M}$ :

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \frac{1}{2} \left( a + d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - cb)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( a + d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4cb} \right).\end{aligned}\tag{360}$$

Diese sind reell, wenn der Ausdruck unter der Wurzel positiv ist,  $(a - d)^2 + 4cb > 0$ , und ansonsten sind die beiden Eigenwerte komplex und zwar komplex konjugiert zueinander.

Die Vektoren  $\mathbf{r}_{1,2}$ , die für  $\lambda_{1,2}$  die Eigenwertgleichung

$$\mathcal{M}\mathbf{r}_{1,2} = \lambda_{1,2}\mathbf{r}_{1,2}\tag{361}$$

erfüllen, sind die *Eigenvektoren*. Da auch ein gestreckter Vektor  $a\mathbf{r}$  ( $a$  Zahl) diese Eigenwertgleichung erfüllt, ist eine Komponente des Eigenvektors frei wählbar. Wählt man  $x_{1,2} = 1$ , so folgt als Bestimmungsgleichung für die zweite Komponente

$$y_{1,2} = \frac{\lambda_{1,2} - a}{b}.\tag{362}$$

Da Eigenvektoren einen beliebigen Faktor enthalten, wird deren Länge im allgemeinen auf "1" normiert.

Wie in den beiden folgenden Beispielen, sind die Eigenvektoren  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  meistens orthogonal zueinander (Ausnahmen kommen später). Sind die Eigenwerte komplex, so werden auch die Eigenvektoren komplex. Hier ist anzumerken, da bei der Überprüfung der Orthogonalität von komplexen Eigenvektoren zu beachten ist, dass im komplexen das Skalarprodukt wie folgt definiert ist

$$\mathbf{r}_i^* \cdot \mathbf{r}_j \quad \text{Skalarprodukt für komplexe Vektoren}\tag{363}$$

**Beispiel 1:**  $a = 1, b = 2, c = 2, d = 1$ . Die Eigenwerte sind dann in diesem Falle  $\lambda_1 = 3$  und  $\lambda_2 = -1$ . Für die korrespondierenden normierten Eigenvektoren finden wir

$$\mathbf{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.\tag{364}$$

Es ist an diesem Beispiel auch leicht zu sehen, da diese beiden Eigenvektoren orthogonal zueinander sind:  $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = 0$ !

**Beispiel 2:**  $a = 1, b = 2, c = -2, d = 1$ . In diesem Falle sind die beiden Eigenwerte komplex:  $\lambda_1 = 1 + 2i$  und  $\lambda_2 = 1 - 2i$ . Die Eigenvektoren hierzu sind

$$\mathbf{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \quad (365)$$

Auch diese beiden Eigenvektoren sind bzgl. des Skalarproduktes für komplexe Vektoren orthogonal zueinander.

## 12 Hauptachsentransformation und Diagonalisierung

Anwendung der Eigenwert-Analyse:

Kurven 2. Ordnung sind von der Form

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + g = 0, \quad (366)$$

und diese lassen sich mit  $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  auch noch in Matrixform (quadratische Form auch genannt) schreiben

$$\mathbf{r}^T \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \mathbf{r} + g = (x, y) \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + g. \quad (367)$$

Wäre nun diese Matrix diagonal, so würde der Mischterm  $2cxy$  in der Ausgangsgleichung verschwinden. Die Frage ist, ob sich durch Drehung des "Vektors"  $(x, y)$  dieser Faktor  $2cxy$  wegtransformieren läßt? Dies entspräche dann auch einer Diagonalisierung der Matrix?

Um dieses Ziel der Diagonalisierung zu erreichen, ist folgende Vorgehensweise angebracht.

1. Bestimmung der beiden Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$  von  $M = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$
2. Bestimmung der dazugehörigen normierten Eigenvektoren  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$
3. Definition einer Drehmatrix aus den beiden Eigenvektoren  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$

$\mathcal{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ , wobei die Komponenten der Eigenvektoren  $\mathbf{a}_1 = (a_1, b_1)$  und  $\mathbf{a}_2 = (a_2, b_2)$  durch folgende Relationen definiert sind:  $a_1 = \cos \alpha$ ,  $b_1 = \sin \alpha$  und  $a_2 = -\sin \alpha$  und  $b_2 = \cos \alpha$ .

4. Nun nehmen wir an, dass der Vektor  $\mathbf{r} = (x, y)$  durch eine Drehung um den Winkel  $\alpha$  aus einem Vektor  $(u, v)$  hervorgegangen ist:  $\mathbf{r} = \mathcal{A} \mathbf{u}$  mit  $\mathbf{u} = (u, v)$ .

Setzen wir dies nun in Gleichung (367) ein, so bekommen wir

$$\mathbf{u}^T \mathcal{A}^T \mathcal{M} \mathcal{A} \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \mathbf{u} + g = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + g = 0 \quad (368)$$

und daraus die Regel für die **Diagonalisierung** der Matrix

$$\mathcal{A}^T \mathcal{M} \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (369)$$

Die Richtung der neuen  $u, v$ -Koordinatenachsen ist durch die Eigenvektoren  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ , den sogenannten *Hauptachsen* gegeben.

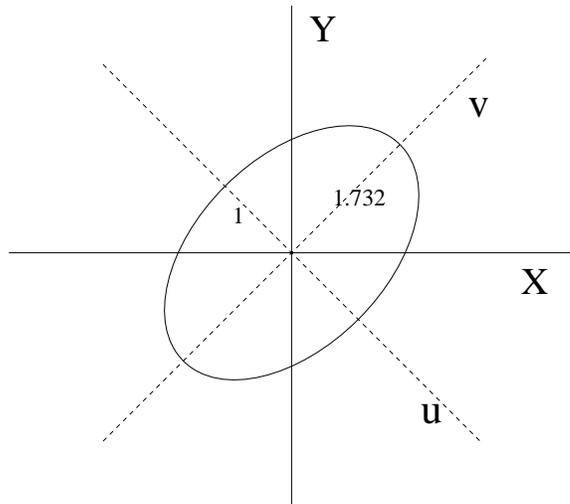


Abbildung 34: Das Hauptachssystem  $uv$  wird nun durch die Eigenvektoren  $\mathbf{a}_1$  und  $\mathbf{a}_2$  aufgespannt.

**Beispiel** Wir gehen nun von der Kurve 2-ter Ordnung fest Zahlenwerten für die Vorfaktoren aus.

$$4x^2 + 4y^2 - 4xy - 6 = 0 \quad (370)$$

$$(x, y) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}}_{\mathcal{M}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 6 = 0 \quad (371)$$

Die Eigenwerte der Matrix  $\mathcal{M}$  sind dann

$$\lambda_1 = 6 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 2. \quad (372)$$

Mit den obigen Regeln folgen dann auch die normierten Eigenvektoren

$$\mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (373)$$

Dies sind die Hauptachsen der Ellipse, die durch Gl.(370) beschrieben wird. Die Eigenvektoren bilden spaltenweise die Drehmatrix

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{also} \quad \alpha = -\frac{\pi}{4} \quad (374)$$

Nachdem die Matrix bestimmt ist, können wir nun die Transformaton zur Diagonalisierung der Matrix  $\mathcal{M}$  ausführen.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^T \mathcal{M} \mathcal{A} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (375)$$

Die Gleichung in  $uv$

$$6u^2 + 2v^2 - 6 = 0 \quad (376)$$

ist nun nochmals im ursprünglichen beschreibt offenbar eine Ellipse mit der langen Halbachse in  $v$ -Richtung und der kurzen Halbachse in  $u$ -Richtung. Die Längen dieser Halbachsen verhalten sich umgekehrt proportional zu Wurzeln der Eigenwerte:

[Länge von Halbachse 1 ( $u$ )] / [Länge von Halbachse 2 ( $v$ )] =  $\sqrt{\lambda_2}/\sqrt{\lambda_1}$ ;

die Achs-Richtungen sind durch die Eigenvektoren  $\mathbf{a}_1$  und  $\mathbf{a}_2$  gegeben.

Diese Hauptachsentransformation in  $n = 2, 3, \dots$  Dimensionen hat vielerlei Anwendung z.B. bei der Diagonalisierung von Matrizen oder auch der Berechnung von Hauptträgheitsmomenten von starren Körpern.

Wir haben damit also die ursprüngliche Ellipse in ihrem Eigensystem ( $u, v$ ) dargestellt, welches ihrer Symmetrie besonders angepasst ist.

## 13 Differentialgleichungen

Differentialgleichungen sind ein zentrales Beschreibungsmittel der Physik. Meist ist es einfach, 'Kräfte' und 'Reaktionen' eines Phänomens räumlich und zeitlich lokal aufzuschreiben: Wenn auf einen Körper eine Kraft wirkt, nimmt dessen Geschwindigkeit zu. Wir geben damit zeitliche Änderungsraten an. Wenn Wasser bergab fließt, hat es eine Tendenz, der "Fall-Linie" zu folgen, der Richtung jeweils größter Steilheit im Gelände. Dies ist also die Richtung der größten räumlichen Änderungsrate, sie zeigt dem Gradienten entgegen.

Wir kommen damit auf Gleichungen, die den Wert einer Funktion  $f(x, t)$  mit der räumlichen Änderung  $\frac{\partial f}{\partial x}$  und der zeitlichen Änderung  $\frac{\partial f}{\partial t}$  verknüpfen. Dies nennt man Differentialgleichungen.

Eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten, deren Lösung eine Exponentialfunktion ist, haben wir bereits im Abschnitt 3.2 kennengelernt. Neben den gewöhnlichen Differentialgleichungen, welche nur Ableitungen nach einer Variablen enthalten, sind die partiellen Differentialgleichungen zur Beschreibung von Phänomenen in Raum und Zeit (welche partielle Ableitungen nach 2 oder 3 Variablen enthalten) noch viel wichtiger.

Ein weiteres Unterscheidungsmerkmal der verschiedenen Typen von Differentialgleichungen ist, ob die Gleichung die entsprechenden Funktionen nur linear oder auch unter einer Wurzel oder in irgendeiner Potenz enthält. Die letzteren, nichtlinearen, Differentialgleichungen zeigen einen noch viel größeren Lösungsreichtum (Chaos, Strukturbildung ...). Viele Naturgesetze lassen sich auch bereits mit linearen Differentialgleichungen beschreiben (Maxwell-Gleichungen, Schrödinger-Gleichung, ..).

Hier werden einige Differentialgleichungen (DGL) nacheinander mit Beispielen kurz vorgestellt, die in der Physik sehr häufig auftauchen, und zwar handelt es sich um:

- Gewöhnliche lineare DGL mit Inhomogenität
- Systeme gewöhnlicher linearer DGL
- Gewöhnliche DGL zweiter Ordnung, ohne erste Ableitung, vom Typ:  
 $y(x)'' + f(y(x)) = 0$ , also linear in  $y(x)''$  aber beliebig im Term  $f(y(x))$
- Lineare partielle DGL in  $t$  und  $x$  mit konstanten Koeffizienten

## 13.1 Gewöhnliche Lineare DGL 1. Ordnung mit Inhomogenität

Die gewöhnliche, lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit konstantem Koeffizienten beschreibt das Wachstum oder das Aussterben einer Population. Die Anzahl der pro Zeiteinheit (Zeit: hier 'x' genannt) hinzukommenden oder wegfallenden Elemente  $dy(x)/dx$  ist also proportional zur Anzahl  $y(x)$  der Elemente zu gerade dieser Zeit  $x$ :

$$y'(x) = -\lambda y(x) \quad (377)$$

Die Gleichung hat die Exponentialfunktion  $y(x) = Ke^{-\lambda x}$  als Lösung und die Amplitude  $K$  kann als Anfangsbedingung bei  $x = 0$  aufgefaßt werden.

Tritt noch eine äussere Einflussrate  $f(x)$  hinzu, so haben wir die inhomogene Differentialgleichung

$$y'(x) = -\lambda y(x) + f(x). \quad (378)$$

Fassen wir hier  $y(x)$  als Geschwindigkeit zur Zeit  $x$  auf, dann ist  $y(x)'$  die Beschleunigung,  $-\lambda y$  ist eine Reibungskraft, und  $f(x)$  ist eine zeitlich veränderliche Antriebskraft. Dieser Differentialgleichungstyp ist z.B. sehr wichtig zur Beschreibung der Brownschen Bewegung von Teilchen in Lösung und anderen Zufallsprozessen.

Die Lösung des homogenen Anteiles der Gleichung ist mit der Exponentialfunktion bekannt. Die Methode zur Bestimmung des inhomogenen Anteiles hat den Namen *Variation der Konstanten*. D.h. anstelle der Konstanten Anfangsbedingung  $K$  bei der homogenen Lösung nimmt man nun eine  $x$ -Abhängigkeit der Konstanten  $K(x)$  an

$$y(x) = K(x)e^{-\lambda x} \quad (379)$$

und setzt diesen Ansatz in die inhomogene Gleichung (378) ein. Dies ergibt für die linke und rechte Seite

$$e^{-\lambda x} (-\lambda K(x) + K'(x)) = -\lambda K(x)e^{-\lambda x} + f(x).$$

Auf der linken und rechten Seite sind gleiche Terme die sich wegheben und es bleibt eine inhomogene Differentialgleichung für  $K'(x)$  übrig

$$K'(x) = e^{\lambda x} f(x).$$

Nach der Trennung der Variablen und Integration folgt als bestimmtes Integral

$$\int_{K(x_0)}^{K(x)} dK = \int_{x_0}^x e^{\lambda x} f(x) dx$$

oder als Stammfunktion für  $K(x)$

$$K(x) = \int_{x_0}^x dx e^{\lambda x} f(x) + C.$$

Mit Gleichung (379) zusammen ergibt dies die Gesamtlösung

$$y(x) = e^{-\lambda x} \left\{ C + \int_{x_0}^x dx' e^{+\lambda x'} f(x') \right\} \quad (380)$$

**Beispiel** mit einer konstanten Inhomogenität  $A$ : Damit bleibt die Gleichung

$$y'(x) = -\lambda y(x) + A \quad \lambda > 0$$

zu lösen. Einsetzen in Gl.(380) gibt

$$y(x) = \frac{A}{\lambda} + C e^{-\lambda x}.$$

Die Anfangsbedingung  $y(x = 0) = y_0$  legt die Konstante  $C$  fest:  $C = y_0 - \frac{A}{\lambda}$ . Die Lösung strebt für große Werte von  $x$  gegen einen konstanten Wert und die Integrationskonstante spielt dann keine Rolle mehr.

## 13.2 Verallgemeinerung: Systeme linearer DGL

Eine weitere Verallgemeinerung sind zwei gekoppelte lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten für die beiden Funktionen  $x(t)$  und  $y(t)$ . Diese beschreibt etwa zwei Populationen, die aufeinander einwirken, oder eine einfache chemische Reaktion, oder - und das ist besonders wichtig - auch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, wie wir beim harmonischen Oszillator weiter unten sehen werden! Ein lineares System mit zwei zu bestimmenden Funktionen  $x(t), y(t)$  sieht aus wie folgt:

$$\dot{x} = Ax + By \quad \text{zur Erinnerung} \quad \dot{x} = \frac{d}{dt}x(t) \quad (381)$$

$$\dot{y} = Cx + Dy. \quad (382)$$

Bei Populationen beschreiben die Konstanten  $A, D$  je nach Vorzeichen Geburten- oder Sterberaten einer Spezies. Die Parameter  $B, C$  beschreiben die Wechselwirkung zwischen Spezies den  $x$  und  $y$ . Handelt es sich z.B. bei  $y$  um Füchse oder Luchse bzw. bei  $x$  um Mäuse oder Schneehasen so ist  $B < 0$ , weil Füchse Mäuse fressen und Luchse Schneehasen jagen. Wenn andererseits Füchse Mäuse fressen, dann können sie sich vermehren, weshalb in diesem Falle  $C > 0$  zu nehmen ist.

Im Falle der Entkopplung  $C = B = 0$  ist die Lösung, also die Exponentialfunktion, schon bekannt. Probieren wir daher einen Ansatz wieder mit einer Exponentialfunktion auch für den gekoppelten Fall:

$$x = \bar{x}e^{\lambda t} \quad ; \quad y = \bar{y}e^{\lambda t}, \quad (383)$$

mit einem unbekanntem Parameter  $\lambda$ . Dies ist vielversprechend, denn nach Ausführung der Ableitung kann der gemeinsame Faktor  $e^{\lambda t}$  aus den Gleichungen 'herausdividiert' werden und es folgt ein **Eigenwertproblem**:

$$\lambda \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \quad (384)$$

Die Eigenwerte dieser Eigenwertgleichung

$$\begin{pmatrix} A - \lambda & B \\ C & D - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = 0 \quad (385)$$

werden wieder aus  $\det(\text{Matrix}) = 0$  berechnet:

$$\lambda_{1,2} = \frac{A + D}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(A - D)^2 + 4BC} \quad (386)$$

Hier unterscheiden wir nun zweckmässigerweise zwei Fälle:

**Fall reeller Eigenwerte** : Für die Parameter

$$A = D = 1 \quad (387)$$

$$C = B \quad (388)$$

ergeben sich die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm B \quad (389)$$

als reelle Zahlen.

Die zugehörigen Eigenvektoren ermitteln wir, indem wir zunächst den ersten Eigenwert überall statt  $\lambda$  in die Matrix Gl.(384) einsetzen, dann versuchsweise  $\bar{x} = 1$  annehmen, und  $\bar{y}$  daraus bestimmen. (Wenn dies nichts Vernünftiges liefert, dann ist möglicherweise  $\bar{x} = 0!$ ). Damit haben wir die beiden Komponenten des Eigenvektors  $\mathbf{r}_1$  zum ersten Eigenwert  $\lambda_1$ . Die gleiche Prozedur wird für  $\lambda_2$  wiederholt, und damit der zweite Eigenvektor  $\mathbf{r}_2$  bestimmt.

Diese Eigenvektoren zur Gleichung (385) ergeben sich damit zu

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (390)$$

Die beiden Eigenvektoren  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  stehen in der (x,y)-Ebene offenbar senkrecht aufeinander. Diese Orthogonalität der Eigenvektoren ist eine Konsequenz der Symmetrie  $B=C$  der Matrix.

Die Eigenvektoren liefern also die zunächst unbekanntem Faktoren zum Ansatz Gl.(383). Sie heissen Eigenvektoren, weil sie unter Anwendung der Matrix Gl.(384) nicht die

Richtung, sondern nur ihren Betrag ändern. Startet man also in einem Punkt der (x,y)-Ebene, der sich auf einer Linie mit einem der Eigenvektoren befindet, so bewegt sich der Punkt so, dass er auf der Linie bleibt!

Natürlich sind beide Eigenvektoren  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  (auch nach einer Multiplikation mit konstanten Vorfaktoren  $a, b$ ) unabhängige Lösungen des Differentialgleichungssystems. Und da das System linear ist, kann man diese beiden Lösungen addieren, wobei  $a$  und  $b$  zunächst beliebige Konstanten ("Amplituden") sind:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t} \quad (391)$$

Damit diese Lösung vollständig ist, müssen wir noch die Konstanten  $a$  und  $b$  bestimmen. Dies erfolgt über die Anfangsbedingung:

$$\begin{pmatrix} x(t=0) \\ y(t=0) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (392)$$

Dies sind zwei lineare Gleichungen mit den zwei Unbekannten  $a$  und  $b$ , die daraus bestimmbar sind. Damit haben wir unser lineares Differentialgleichungssystem vollständig gelöst. - Es bleibt noch anzumerken, dass für grössere Systeme die Matrizen und Vektoren mehr Elemente haben, die Prozedur bleibt aber die gleiche.

Zusammenfassend halten wir Folgendes fest. Die Lösung des Eigenwertproblems (385) erfolgt in drei Stufen: 1) Bestimmung der Eigenwerte durch Lösung des charakteristischen Polynoms, 2) Bestimmung der zum jeweiligen Eigenwert gehörigen Eigenvektors durch Festhalten eines Elements des Eigenvektors und Lösen der verbleibenden linearen Gleichung für das zweite Element, 3) Bestimmung der Vorfaktoren  $a$  und  $b$  aus den Anfangsbedingungen durch Lösung des linearen Gleichungssystems für  $a$  und  $b$ .

Den dritten Schritt können wir übrigens wesentlich vereinfachen, indem wir einfach den Vektor der Anfangsbedingung (392) nacheinander mit jedem der Eigenvektoren multiplizieren, also je ein Skalarprodukt bilden. Wegen der Orthogonalität der Eigenvektoren liefern diese Skalarprodukte auf der rechten Seite von (392) direkt die Koeffizienten  $a$  und  $b$ . Die Skalarproduktbildung projiziert also den zu jedem Eigenvektor gesuchten Koeffizienten direkt heraus. Dies lässt sich auch bei grösseren Systemen als bei dieser 2x2-Matrix genauso durchführen. Dagegen können wir bei Matrizen, die grösser sind als 4x4 nicht mehr direkt die Wurzeln des charakteristischen Polynoms bestimmen. Hier brauchen wir dann entweder den Computer, oder wir "erraten" zuerst die Struktur der Eigenvektoren, und finden dann durch Einsetzen in die Matrixgleichung direkt die Eigenwerte. Letzteres ist genau das Erfolgsgeheimnis der sog. Fourier-Transformation, wie wir später noch sehen werden.

**Fall komplexer Eigenwerte** Für die Parameter

$$A = D \quad (393)$$

$$C = -B \quad \text{und} \quad C > 0 \quad (394)$$

sind die resultierenden Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = D \pm iB \quad (395)$$

ein zueinander konjugiert komplexes Paar. Die dazugehörigen beiden Eigenvektoren nach Gleichung (385) werden gewonnen wie gerade beschrieben:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \quad (396)$$

Auch das weitere Vorgehen ist so, wie gerade für den reellen Fall ausgeführt wurde. Nehmen wir aber speziell an, dass sich die Gesamtlösung aus einer reellwertigen Anfangsbedingung entwickeln soll. Statt eines Ansatzes wie oben

$$x(t) = ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t} \quad (397)$$

mit beliebigen Konstanten  $a$  und  $b$  können wir aber auch genauso gut einen etwas anderen Ansatz machen:

$$x(t) = a \{e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}\} + i b \{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\} \quad (398)$$

Da die Eigenwerte ein konjugiert komplexes Paar darstellen, ist die geschwungene Klammer hinter  $a$  offenbar reell, die hinter  $b$  imaginär. Wir haben hier also das aus den Anfangsbedingungen zu erwartende Ergebnis für die Konstanten  $a$  und  $b$  schon vorsortiert, hätten aber auch einfach beim vorherigen Schema bleiben können.

Um das Ergebnis zu interpretieren sehen wir uns nur kurz den ersten Term mit  $a$  an:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= ae^{Dt} (\mathbf{r}_1 e^{iBt} + \mathbf{r}_2 e^{-iBt}) \\ &= ae^{Dt} \begin{pmatrix} e^{iBt} + e^{-iBt} \\ i(e^{iBt} - e^{-iBt}) \end{pmatrix} \\ &= ae^{Dt} \begin{pmatrix} 2 \cos(Bt) \\ -2 \sin(Bt) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (399)$$

Die  $x(t)$  und  $y(t)$  schwingen demnach phasenverschoben. Dies bedeutet in der (x,y)-Ebene eine um den Ursprung rotierende Bahn-Kurve. Setzen wir auch noch  $D = 0$ , dann bekommen wir eine Kreisbewegung in der (x,y)-Ebene !

## 13.3 Der gedämpfte harmonische Oszillator

### 13.3.1 Definition

Eine der praktisch wichtigsten Differentialgleichungen der ganzen Physik ist der harmonische Oszillator, Prototyp aller Schwingungsvorgänge. Eine an einer Feder hängende Masse  $m$  befinde sich bei Höhe  $x = 0$  in Ruhe. Wird die Masse aus dieser Position nach oben  $x > 0$  oder nach unten  $x < 0$  ausgelenkt, so wirkt die jeweils resultierende Kraft  $F = -kx$  (eine Mischung aus Schwerkraft und Federkraft) rücktreibend, in Richtung auf  $x = 0$ . Der Koeffizient  $k$  ist hier eine "effektive" Federkonstante. Da Kraft gleich Masse mal Beschleunigung ist, haben wir dann  $F = m\ddot{x}$ . Im allgemeinen tritt aber noch eine bremsende Reibungskraft hinzu, die der Geschwindigkeit etwa proportional ist.

Dann erhalten wir:

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} = -kx \quad (400)$$

mit der Masse  $m$ , der Federkonstante  $k$  und der Reibungskonstanten (Dämpfungskonstanten)  $\alpha$ . Dies ist offenbar eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Diese Gleichung beschreibt übrigens nicht nur die klassische Mechanik eines einzelnen schwingenden Teilchens. Wie erst wesentlich später klar werden wird, führt auch die Diagonalisierung eines Systems sehr vieler Freiheitsgrade (sogar bis hin zu kontinuierlichen Systemen) wieder auf genau die Oszillatoren, die jetzt besprochen werden sollen.

Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung kann nun aber auch in zwei gekoppelte Gleichungen erster Ordnung wie im vorangegangenen Abschnitt umgeschrieben werden.

$$\begin{aligned} \dot{x} &\equiv v \\ \dot{v} &= -\frac{\alpha}{m}v - \frac{1}{m}x \quad \text{mit} \quad (k = 1) \end{aligned} \quad (401)$$

Dies ist mit obigen Gleichungssystem völlig äquivalent, wenn man folgenden Identifikationen trifft

$$y = v, \quad A = 0, \quad B = 1, \quad D = \alpha, \quad C = -1/m \quad (402)$$

Mit diesen Parametern folgen mit der Beziehung (386) die Eigenwerte

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\alpha}{2m} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4m^2} - \frac{1}{m}} = \text{Eigenwert Spektrum} \quad (403)$$

welche die Lösung  $x(t)$  der Gleichung (400) liefern:

$$x(t) = x_1 e^{\lambda_1 t} + x_2 e^{\lambda_2 t} \quad (404)$$

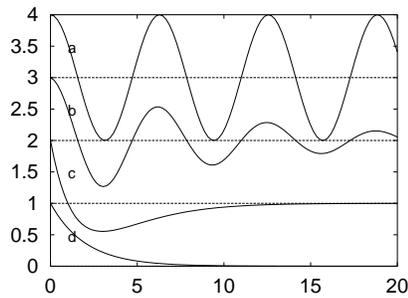


Abbildung 35: Vier Beispielfälle für die Schwingung eines gedämpften harmonischen Oszillators: a) ungedämpft, b) schwach gedämpft, c) kritischer Grenzfall, d) überdämpfter Fall.

mit zwei Konstanten  $x_1, x_2$ , die durch die Anfangsbedingungen zu definieren sind. Wir müssen nun zweckmässigerweise eine Fallunterscheidung durchführen, um die physikalische Bedeutung dieser Eigenwerte besser zu erfassen. Es lässt sich allgemein sagen, dass hier der *Realteil* eines Eigenwertes einer **Dämpfung** und der *Imaginärteil* dieses Eigenwertes einer **Schwingungsfrequenz** entsprechen wird.

### 13.3.2 4 Parameterbereiche

Nun also zur Fallunterscheidung: Vier verschiedene Parameterbereiche lassen sich identifizieren.

Fall a)  $\alpha = 0$  :      **ungedämpft**

$$\lambda = \pm \sqrt{-\frac{1}{m}} = \pm i \frac{1}{\sqrt{m}} \quad (405)$$

$$\text{also ist die Frequenz } w = \pm \frac{1}{\sqrt{m}} \quad (406)$$

Achtung: Diese 'Frequenz' ist genauesagt die Winkelgeschwindigkeit, also 'Frequenz mal zwei Pi'.

check:

$$x = x_o e^{iwt} \quad ; \quad \dot{x} = iw x \quad ; \quad \ddot{x} = -w^2 x \quad ;$$

EOM:

$$-mw^2 x + \alpha iw x = -x \quad (407)$$

$$-\frac{m}{m} x = -x \quad (408)$$

Fall b)  $|\alpha^2/m| \ll 1$  :      **schwach gedämpft**

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\alpha}{2m} \pm i \sqrt{\frac{1}{m}} \left( \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4m}} \right) \quad (409)$$

$$\lambda_{1/2} \approx -\frac{\alpha}{2m} \pm i \sqrt{\frac{1}{m}} \left( 1 - \frac{\alpha^2}{8m} \right) \quad (410)$$

$$= iw \quad (411)$$

$$x = x_o e^{-\frac{\alpha}{2m} t} e^{\pm i \frac{1}{\sqrt{m}} (1 - \frac{\alpha^2}{8m}) \cdot t} \quad (412)$$

Fall c)  $\frac{\alpha^2}{4m^2} = \frac{1}{m}$  :       $\alpha^2 = 4m$       **kritischer Grenzfall!**

$$\lambda = -\frac{\alpha}{2m} = iw \quad (413)$$

$$x = x_o e^{-\frac{\alpha}{2m} t} \quad (414)$$

und ausserdem(!) :

$$x = t \cdot x_o e^{-\frac{\alpha}{2m} t} \quad (415)$$

Diese letzte Gleichung erhält man übrigens aus dem folgenden Ansatz für eine Lösung aus zwei verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_1, \lambda_2$  im Grenzfall, wo die Eigenwerte zusammenfallen:

$$x(t) \sim \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \approx t + \dots \quad (416)$$

wobei eine Taylor-Entwicklung nach  $\epsilon = \lambda_1 - \lambda_2$  gemacht wurde.

Diese letzte Lösung - die sogenannte säkulare Lösung - im kritischen Grenzfall, wird übrigens oft vergessen!

Fall d)  $\frac{\alpha^2}{4m^2} > \frac{1}{m}$       **überdämpft**

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\alpha}{2m} \left( 1 \mp \sqrt{1 - \frac{4m}{\alpha^2}} \right) \quad (417)$$

$$\approx -\frac{\alpha}{2m} \left( 1 \mp \left[ 1 - \frac{2m}{\alpha^2} \right] \right) \quad (418)$$

$$\lambda_1 \approx -\frac{\alpha}{2m} \left( 2 - \frac{2m}{\alpha^2} \right) = -\frac{\alpha}{m} + \frac{1}{\alpha} \quad (419)$$

$$\lambda_2 \approx -\frac{\alpha}{2m} \left( +\frac{2m}{\alpha^2} \right) \approx -\frac{1}{\alpha} \quad (420)$$

check:

$$m \lambda^2 + \alpha \lambda + 1 = 0 \quad (421)$$

$\alpha \gg 1$  ;  $\frac{\alpha}{m} \ll 1$

$$\frac{m}{\alpha^2} - 1 + 1 \approx 0 \quad (422)$$

$$m \frac{\alpha^2}{m^2} + m \left(-\frac{\alpha}{m}\right) - \frac{\alpha^2}{m} + 1 + 1 = 0 \quad (423)$$

bis auf  $\sigma(\frac{1}{\alpha^2})$

$$\frac{\alpha^2}{m} - \frac{\alpha^2}{m} - 2 + 1 + 1 = 0 \quad (424)$$

### Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{m} - \lambda & -\frac{1}{m} \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_o^{(\lambda)} \\ x_o^{(\lambda)} \end{pmatrix} = 0 \quad (425)$$

Normierung der EV's beliebig, daher Ansatz:

$$v_o^{(\lambda)} = 1$$

(Vorsicht, manchmal ist auch  $v_o^{(\lambda)} = 0!$ )

$$\begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{m} - \lambda & -\frac{1}{m} \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_o^{(\lambda)} \end{pmatrix} = \sigma \quad (426)$$

2-te Zeile:

$$1 - \lambda x_o^{(\lambda)} = 0 \quad (427)$$

$$x_o^{(\lambda)} = \frac{1}{\lambda} \quad (428)$$

1-te Zeile:

$$\left(-\frac{\alpha}{m} - \lambda\right) \cdot 1 - \frac{1}{m} x_o^{(\lambda)} = 0 \quad (429)$$

$$-\frac{\alpha}{m} - \lambda - \frac{1}{m} x_o^{(\lambda)} = 0 \quad (430)$$

Einsetzen der 1. Zeile

$$-\frac{\alpha}{m} - \lambda - \frac{1}{m} \frac{1}{\lambda} = 0 \quad (431)$$

$$\lambda^2 + \frac{\alpha}{m} \lambda + \frac{1}{m} = 0 \quad (432)$$

dies ist aber die exakte Betragsgleichung für  $\lambda$ , siehe oben.  
Also Eigenvektoren:

$$v_o^{(\lambda)} = 1 \quad , \quad x_o^{(\lambda)} = \frac{1}{\lambda} \quad (433)$$

Der ungedämpfte Oszillator schwingt also gleichmässig periodisch mit einer sinus-Schwingung. Der schwach gedämpfte Oszillator tut fast das Gleiche, nur dass die Schwingungsamplitude mit der Zeit immer kleiner wird, siehe Abbildung (35).

Der stark überdämpfte Oszillator kriecht von seiner Anfangsamplitude langsam gegen den asymptotischen Wert, ohne diesen zu überschreiten. Im kritischen Grenzfall nähert sich die Amplitude dem asymptotischen Wert ebenfalls kriechend, allerdings kann dieser dabei gerade einmal überschritten werden.

### 13.4 Defective Matrices

siehe hier folgenden Einschub "Good and Bad Matrices .." etc.: (ein deutscher Text ist noch in Vorbereitung)

**Next:** Computing Eigenvalues and Eigenvectors **Up:** Eigenvalues and Eigenvectors **Previous:** Computing Eigenvalues and Eigenvectors

## Good and Bad Matrices

Solving differential equations becomes much easier when matrices have a full set of orthonormal eigenvectors. For instance, the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

has eigenvalues 2 and 1 and eigenvectors

$$s_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad s_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Matrices with  $n$  orthonormal eigenvectors are called *normal*. Normal matrices are good news, because then the  $n \times n$  system of differential equations

$$\dot{x} = Ax$$

has solution

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i s_i e^{\lambda_i t} = S \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} c$$

where  $S = [s_1 \cdots s_n]$  are the eigenvectors,  $\lambda_i$  are the eigenvalues, and the vector  $c$  of constants  $c_i$  is

$$c = S^H x(0) .$$

More compactly,

$$x(t) = S \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} S^H x(0) .$$

Fortunately these matrices occur frequently in practice. However, not all matrices are as good as these. First, there may still be a complete set of  $n$  eigenvectors, but they may not be orthonormal. An example of such a matrix is

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

which has eigenvalues 2 and 1 and nonorthogonal eigenvectors

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{q}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

This is conceptually only a slight problem, because the unitary matrix  $S$  is replaced by an invertible matrix  $Q$ , and the solution becomes

$$\mathbf{x}(t) = Q \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} Q^{-1} \mathbf{x}(0).$$

Computationally this is more expensive, because a computation of a Hermitian is replaced by a matrix inversion.

However, things can be worse yet, and a full set of eigenvectors may fail to exist, as we now show.

A necessary condition for an  $n \times n$  matrix to be *defective*, that is, to have fewer than  $n$  eigenvectors, is that it have repeated eigenvalues. In fact, we have seen (theorem 5.1.1) that a matrix with distinct eigenvalues (zero or nonzero does not matter) has a full set of eigenvectors (perhaps nonorthogonal, but independent). The simplest example of a defective matrix is

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

which has double eigenvalue 0 and only eigenvector  $[1 \ 0]^T$ , while

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

has double eigenvalue 3 and only eigenvector  $[1 \ 0]^T$ , so zero eigenvalues are not the problem.

However, repeated eigenvalues are not a sufficient condition for defectiveness, as the identity matrix proves.

How bad can a matrix be? Here is a matrix that is singular, has fewer than  $n$  eigenvectors, and the eigenvectors it has are not orthogonal. It belongs to the scum of all matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Its eigenvalues are 0, because the matrix is singular, and 2, repeated twice.  $A$  has to have a repeated eigenvalue if it is to be defective. Its two eigenvectors are

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

corresponding to eigenvalues 0 and 2 in this order, and there is no  $\mathbf{q}_3$ . Furthermore,  $\mathbf{q}_1$  and  $\mathbf{q}_2$  are not orthogonal to each other.

---

[Next](#) [Up](#) [Previous](#)

**Next:** Computing Eigenvalues and Computing Eigenvalues and    **Up:** Eigenvalues and Eigenvectors    **Previous:**

*Xiaofeng Ren*  
*Tue Sep 14 10:14:50 PDT 1999*

**Next:** Spektralradius einer Matrix A **Up:** Jordan-Normalform (III, S. 165f) **Previous:** Jordan-Normalform (III, S. 165f)

## Bestimmung von Hauptvektoren statt fehlender Eigenvektoren

Aus der  $(n, n)$ -Matrix  $A$  erhält man  $i \leq n$  linear unabhängige Eigenvektoren, diese werden als Spaltenvektoren  $C_1 \dots C_i$  verwendet.

Ist  $i < n$ , müssen  $C_{i+1} \dots C_n$  mit Vektoren  $\vec{c}$  aus

$$\begin{aligned}(A - \lambda_i E)^2 \vec{c}^T &= \vec{0}^T \\ (A - \lambda_i E)^3 \vec{c}^T &= \vec{0}^T \dots\end{aligned}$$

die jeweils zu allen vorher bestimmten Vektoren linear unabhängig sind, aufgefüllt werden.

Alternativ kann man auch Hauptvektoren zum Auffüllen der Matrix verwenden (empfohlen). Zu jedem Eigenvektor  $C_{j1}$  (Eigenvektor = Hauptvektor 1. Stufe) werden nacheinander Hauptvektoren  $C_{12}, C_{22}, \dots, C_{13}, C_{23}, \dots$  höherer Stufen bestimmt, bis die Matrix aufgefüllt ist (keine Nullvektoren verwenden!!).

Die Hauptvektoren berechnen sich nach

$$\begin{aligned}(A - \lambda E)C_{j1} &= 0 \text{ (Eigenvektor)} \\ (A - \lambda E)C_{j2} &= C_{j1} \\ (A - \lambda E)C_{j3} &= C_{j2}\end{aligned}$$

---

Heiko: <http://www.fto.de/~hschaefer/hm1/node144.html>  
1/28/1998

## 13.5 DGL 2. Ordnung; homogen, ohne Ableitung 1.Ordnung

Hat man - wie beim harmonischen Oszillator - eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung vor sich, bei der keine Dämpfung vorliegt, so lässt sich sogar für eine nichtlineare Abhängigkeit von der unbekanntem Funktion  $y(x)$  eine Lösung finden:

$$y''(x) = f(y(x)) \quad (434)$$

Hier kann  $f(y(x))$  eine fast beliebige Funktion von  $y(x)$  sein, nur die erste Ableitung nach  $x$  darf nicht vorkommen. Denken wir uns  $x$  als Zeit, und  $y$  als Ort, so steht links die Beschleunigung, und rechts offenbar eine vom Ort  $y$  abhängige Kraft  $f$ .

Ansatz:

$$y'(x) = g(y(x)) \quad (435)$$

$$y''(x) = \frac{dg}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = g(y) \cdot \frac{dg}{dy} \quad (436)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dy} g^2(y) \quad (437)$$

Wir können  $f(y)$  auch als Ableitung eines Potentials  $F(y)$  nach  $y$  auffassen.

$$\frac{d}{dy} g^2(y) = 2f(y) \quad (438)$$

$$g^2(y) = 2 \int^{\tilde{y}=y} f(\tilde{y}) d\tilde{y} + C \quad ; \quad \int^y f(\tilde{y}) d\tilde{y} = F(y) \quad (439)$$

$$\frac{dy(x)}{dx} = g(y) = \sqrt{2F(y) + C} \quad (440)$$

$$x = \int_{y=y(x=0)}^{y(x)} dy \frac{1}{\sqrt{2F(y) + C}} \quad (441)$$

Hier haben wir also eine implizite Lösung für  $x$  als Funktion von  $y$  erhalten, dafür aber sehr allgemein.

## 13.6 Lineare Partielle DGL mit konstanten Koeffizienten

Ursache-Wirkungsrelationen sind häufig 'linear'. Naturgesetze wollen wir 'lokal' formulieren (keine instantanen Fernwirkungen!), also 'Differentialgleichungen', und zwar in Raum und Zeit, daher 'partielle DLG'. Und schliesslich sollen die Naturgesetze nicht vom absoluten Ort und der absoluten Zeit abhängen, daher 'konstante Koeffizienten'. Wir werden es daher häufig mit "linearen partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten" zu tun haben! (Dies gilt für grosse Teile der Mechanik, die gesamte Elektrodynamik, und das erste Semester Quantenmechanik).

Eine willkürlich aufgeschriebene partielle DGL, linear in der unbekanntem Funktion  $y(x, t)$  und mit beliebigen Ableitungen nach den zwei unabhängigen Variablen  $x$  und  $t$  sieht beispielsweise so aus:

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = Ay' + By'' + Cy''' \dots \quad (442)$$

Die grundsätzliche Lösung erhält man über den Ansatz:

$$y = e^{\lambda t} e^{ikx} \cdot y_o \quad (443)$$

$$(a, b, c, A, B, C = \text{Konstanten}) \quad (444)$$

Überprüfen wir das durch Einsetzen:

$$\dot{y} = \lambda y \quad ; \quad y' = ik y \quad (445)$$

$$\ddot{y} = \lambda^2 y \quad ; \quad y'' = -k^2 y \quad \text{etc.} \quad (446)$$

$$a\lambda^2 + b\lambda + C = Aik - Bk^2 - Cik^3 \dots \quad (447)$$

Dann folgt:

$$\lambda_{1/2} = f_{1/2}(k) \quad (448)$$

und der Ansatz scheint zu funktionieren!

Diese letzte Gleichung nennt man das **Spektrum**.

$$\lambda = \lambda_k := f(k) \quad (449)$$

Also ist eine Lösung:

$$y = y_o e^{\lambda_k t} e^{ikx} \quad (450)$$

für zunächst beliebiges  $k$ , aber  $\lambda_k$  ist durch  $k$  bestimmt!

Achtung:  $k$  (und  $\lambda_k$ ) nennt man **Eigenwert**,

$e^{\lambda_k t + ikx}$  nennt man Eigenfunktion.

In Wirklichkeit hat man natürlich alle möglichen Werte von  $k$  als Lösung. Die gesamte Lösung muss man daher als Summe (oder Integral) aller dieser Lösungen mit (beliebigen) Gewichtungsfaktoren  $y_k$  schreiben:

$$y = \sum_k y_k e^{\lambda_k t} e^{ikx} \quad (451)$$

Dies wird uns noch weiter unten beschäftigen.

## 14 Diagonalisierung einer Differentialgleichung und Fourier-Transformation

Wir wollen nunmehr den Zusammenhang zwischen Differentialgleichungen und Matrizen, den wir schon beim harmonischen Oszillatore kennengelernt haben, noch etwas vertiefen. Im übrigen spricht man in der Mathematik statt von Matrizen oft allgemeiner von "Operatoren"; es ist ganz hilfreich, sich diese einfach als Matrizen vorzustellen! Ein einfaches Beispiel einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung in einer Raumdimension ist

$$y''(x) = -\hat{\lambda} y(x) \quad (452)$$

Diese Struktur kommt z. B. aus der zeitabhängigen Schrödingergleichung oder der Diffusionsgleichung, je nach Interpretation der beteiligten Größen. Nehmen wir etwa für die Wärme-Diffusionsgleichung an, dass  $\psi(x, t)$  die lokale Temperatur eines langen Stabes zur Zeit  $t$  am Ort  $x$  beschreibt, so gilt für die Zeitentwicklung der Temperatur (unter Vernachlässigung von Abstrahlung):

$$\dot{\psi} = D \psi'' \quad (453)$$

i Hier ist  $D$  die reellwertig-positive Wärmediffusionskonstante. Für die weitere Rechnung spielt es aber keine Rolle ob,  $D$  reell oder komplex ist (Schrödinger-Gleichung!). Ansatz mit zunächst beliebigem  $\tilde{\lambda}$ :

$$\psi = e^{-\tilde{\lambda}t} \cdot y(x) \quad \rightarrow \quad -\tilde{\lambda} e^{-\tilde{\lambda}t} y(x) = D e^{-\tilde{\lambda}t} y'' \quad (454)$$

Somit haben wir mit  $\tilde{\lambda} = \hat{\lambda} D$  die oben genannte Form

$$y''(x) = -\hat{\lambda} y(x). \quad (455)$$

Diskretisierung der Ableitungen ergibt:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{y(x+a) - y(x)}{a}; \text{ oder } = \frac{y(x) - y(x-a)}{a}; \\ y''(x) &= \left\{ \frac{y(x+a) - y(x)}{a} - \frac{y(x) - y(x-a)}{a} \right\} / a \end{aligned} \quad (456)$$

bzw. zusammengefasst:

$$y''(x) = \frac{y(x+a) - 2y(x) + y(x-a)}{a^2} \quad (457)$$

Ist  $y(x)$  auf dem Intervall  $x \in [0, L]$  definiert und  $a = L/(n+1)$  so führt diese Diskretisierung der zweiten Ableitung auf die Rekursionsgleichung für  $y_n$  an den Stellen  $x = na$ .

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = \lambda y_n \quad ; \quad \lambda = -a^2 \hat{\lambda} \quad (458)$$

Diese Gleichung läßt sich auch in eine **Matrix und Vektor-Beziehung** bringen:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix}$$

Wir fassen also die Funktion  $y(x)$  als Vektor in einem  $N$ -dimensionalen Raum auf.

$$\underline{A} \cdot \underline{y} = \lambda \cdot \underline{y} \quad (459)$$

Wir bemerken, dass entlang der Diagonalen der Matrix  $A$  die Elemente **konstant** sind, ebenfalls jeweils in Super- und Sub-Diagonalen. (Dies ist immer so für Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten!!)

Wir führen gleich noch **periodische Randbedingungen** ein! Dazu ergänzen wir die Matrix in der rechten oberen und linken unteren Ecke jeweils um die '1', die links oben und rechts unten in der abgeschnittenen Nebendiagonalen weggefallen ist.

Nun können wir die Struktur der Eigenvektoren **erraten**:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{iq \cdot 0} \\ e^{iq \cdot 1} \\ e^{iq \cdot 2} \\ e^{iq \cdot 3} \\ e^{iq \cdot 4} \end{pmatrix}$$

Normierung: Periodizität:  $e^{iqN} = e^{iq \cdot 0} = 1$

$$q = 2\pi \frac{m}{N} \quad ; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Das Element  $N$  des Eigenvektors ist also identisch mit dem Element  $0$ .  
Probe (jetzt mit periodisch ergänzter Matrix):

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{iq0} \\ e^{iq1} \\ e^{iq2} \\ e^{iq3} \\ e^{iq4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{iq(N-1)} - 2e^{iq0} + e^{+iq1} \\ e^{iq0} - 2e^{iq} + e^{iq2} \\ e^{iq1} - 2e^{iq2} + e^{iq3} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Die "1" in der rechten oberen Ecke der Matrix und in der linken unteren Ecke garantiert periodische Randbedingungen:

$$= \begin{pmatrix} e^{iq0} [e^{iq(N-1)} - 2 + e^{iq}] \\ e^{iq1} [e^{-iq} - 2 + e^{+iq}] \\ e^{iq2} [e^{-iq} - 2 + e^{+iq}] \\ e^{iq3} [e^{-iq} - 2 + e^{+iq}] \\ \vdots \end{pmatrix} = (e^{iq} + e^{-iq} - 2) \begin{pmatrix} e^0 \\ e^{iq} \\ e^{iq2} \\ e^{iq3} \\ e^{iq4} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$-2(1 - \cos(q)) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_q = -2(1 - \cos(q))$$

Damit haben wir in  $\lambda_q$  den **Eigenwert** zum Index  $q$  gefunden! Im Gegensatz zum Vorgehen bei den 2x2-Matrizen, wo wir erst die Eigenwerte bestimmt haben, und dann die Eigenvektoren, haben wir hier offenbar zuerst die Struktur der Eigenvektoren "erraten", und dann sofort die Eigenwerte hieraus abgeleitet.

Wir können nämlich für die Eigenvektoren zum jeweiligen Index  $q$  schreiben:

$$\vec{v}_q = (v_q(x_1), v_q(x_2), v_q(x_3), \dots, v_q(x_N)) \quad (460)$$

$$x_{n+1} = n \cdot a \quad (461)$$

$$\vec{v}_q = \{e^{iqn}\} \quad ; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1 \quad (462)$$

Explizit koennen wir die **Eigenvektoren** auch schreiben (wobei wir noch zwischen Links- und Rechts-Eigenvektoren unterscheiden):  
(Für Links-EV noch nicht gezeigt, aber analog!)

$$\begin{pmatrix} e^{iq0} \\ e^{iq1} \\ e^{iq2} \\ e^{iq3} \\ e^{iq4} \\ \vdots \end{pmatrix} =: |q\rangle \quad (e^{-i\tilde{q}0}, e^{-i\tilde{q}1}, e^{-i\tilde{q}2}, \dots) =: \langle \tilde{q} |$$

Das Skalarprodukt ist definiert als  $\langle \tilde{q} | * |q\rangle =: \langle \tilde{q} | q\rangle$ :

$$\langle \tilde{q} | q\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} e^{iq \cdot n} e^{-i\tilde{q} \cdot n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(q-\tilde{q})n} \quad (463)$$

Von der Geometrischen Reihe wissen wir:

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a} \quad ; \quad a = e^{i(q-\tilde{q})} \quad (464)$$

$$\langle \tilde{q} | q\rangle = \frac{1 - e^{i(q-\tilde{q})N}}{1 - e^{i(q-\tilde{q})}} \quad (465)$$

Wegen der Normierung durch Periodizität ist  $e^{iqN} = 1$  somit:  $\langle \tilde{q} | q\rangle = 0$  ?

Aber: für  $q = \tilde{q}$  muss man genauer hinsehen:  $\sum_{n=0}^{N-1} 1 = N$

Also folgt für das Skalarprodukt aus Links- und Rechtseigenvektoren:

$$\langle \tilde{q} | q\rangle = \delta_{\tilde{q},q} \cdot N \quad \rightarrow \quad \text{Orthogonalität der Eigenvektoren} \quad (466)$$

Wir definieren hier das **Kronecker-Delta**:  $\delta = \{0, 1\}$ , es ist also 'Eins' wenn beide Indizes gleich sind, sonst 'Null'. Das Kronecker-Delta lässt sich also als Einheitsmatrix auffassen!

Zurück ins Kontinuum:

$$\delta_{\tilde{q},q} \quad \rightarrow \quad \delta(\tilde{q} - q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i(\tilde{q}-q)x} \quad (467)$$

(Vergleiche diesen Ausdruck mit der Summe!) Wir haben also einen neuen Ausdruck für die **Delta-Funktion** gefunden.

Wenn wir nun alle Einheitsvektoren zur Matrix A nebeneinanderstellen, wobei jeder Spaltenvektor zu einem anderen q-Wert  $q = 1, 2, 3, \dots * \frac{2\pi}{N}$  genommen wird, so erhalten wir eine Matrix  $T_R$ .

$$T_R = (|q\rangle) \quad ; \quad \langle q|q\rangle = 1 \text{ jetzt Normiert!} \quad (468)$$

$$\text{und analog ergibt sich } T_L = (\langle\tilde{q}|) \quad (469)$$

für die Links-Matrix  $T_L$  der Zeilenvektoren.  
Durch Produktbildung ergibt sich

$$T_L \cdot T_R = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} = I \quad \text{Einheitsmatrix} \quad (470)$$

Daher schreiben wir:

$$T_L = T_R^{-1} \quad (471)$$

wobei für unsere  $e^{iqx}$  noch gilt  $T_L = T_R^T$ : (Zeilen und Spalten vertauscht, Vorzeichenwechsel im Imaginärteil)

**Fazit:**

Wir fassen also einen Ausdruck  $e^{iqx}$  auf als ein Element einer Matrix  $T_R = T_{x,q}$ , wobei q die Spalten durchnummeriert, und x die Zeilen durchnummeriert.  $T_{x,q}$  ist also das x-te Element des q-ten (Spalten-) Eigenvektors. Offenbar ist die transponierte Matrix gerade  $T_L = T_{\tilde{q},x} = e^{-i\tilde{q}x}$ . Das Matrix-Produkt  $T_L \cdot T_R = \sum_x e^{i(q-\tilde{q})x} = N\delta_{q,\tilde{q}}$ , stellt dann die Einheitsmatrix multipliziert mit N dar. (Achtung: Natürlich ist bei dem Ausdruck  $e^{iqx}$  nicht klar, was nun als Spalten- oder als Zeilen-Index (x oder q) genommen werden soll. Dies ist auch egal, nur muss die Definition für die Rechts- und die Links-Eigenvektoren konsistent sein!).

Übrigens werden alle Matrizen, deren Elemente in Diagonalrichtung konstant bleiben (egal wieviele Diagonalen besetzt sind) durch diesen Ansatz  $e^{iqx}$  diagonalisiert! Das Ganze nennt man auch *Fourier-Darstellung*. Wir fassen eine Funktion f(x) als einen Punkt in einem hochdimensionalen Raum auf. Verschiedene Werte von 'x' entsprechen verschiedenen Koordinatenachsen. Die Eigenvektoren  $e^{iqx}$  (für je ein festes q) entsprechen dann neuen Koordinatenachsen (vergl. den Abschnitt über Hauptachsentransformation!), sodass zeitliche Änderungen der Funktion dann einfach Verschiebungen entlang dieser Eigenvektoren und zwar um den Faktor der Eigenwerte darstellen.

## 15 Eigenwertproblem allgemein

Um den Überblick nicht zu verlieren, hier ganz knapp nochmal die Vorgehensweise symbolisch aufgelistet:

Das Eigenwertproblem stellt sich wie folgt. Gegeben Matrix  $A$ , gesucht Eigenwerte  $\lambda$  und Eigenvektoren  $u$ :

$$A u = \lambda u \quad ; \quad A = \text{Matrix}, u = \text{Vektor}, \lambda = \text{Skalar} \quad (472)$$

Für den Eigenvektor Nummer  $v$  zum Eigenwert  $\lambda_v$  haben wir also:

$$A |v\rangle = \lambda_v |v\rangle \quad (473)$$

Linkseigenvektoren sind definiert durch

$$\langle v | A = \lambda_v \langle v | \quad (474)$$

Dann wird

$$\langle v | A |v\rangle = \lambda_v \langle v | v\rangle = \lambda_v \quad (475)$$

Um einen beliebigen Vektor (=eine beliebige Funktion) durch Linearkombination von Eigenvektoren darzustellen, gehen wir in drei Schritten vor: 1) Ermittlung der Eigenvektoren (zumindest deren Struktur), 2) Einsetzen in die Eigenwert-Gleichung ergibt den zum jeweiligen Eigenvektor gehörigen Eigenwert, 3) eine beliebige Funktion  $|y\rangle$  (= einen beliebigen Vektor) kann man dann darstellen als  $|y\rangle = \sum_w \hat{y}_w |w\rangle$  mit Entwicklungskoeffizienten  $\hat{y}_w$ , wobei  $w$  die Eigenvektoren durchnummeriert. Die  $\hat{y}_v$  ergeben sich sofort, indem man das Skalarprodukt  $\langle v | y\rangle = \hat{y}_v$  bildet, falls die Eigenvektoren auf '1' normiert waren, und zwar wegen  $\langle v | w\rangle = \delta_{v,w}$ .

Explizit schieben wir also eine Einheitsmatrix, bestehend aus einer noch unbekanntem Matrix  $T$  und ihrer Inversen, in die Gleichung ein. Dies gibt dann formal:

$$A \underbrace{TT^{-1}}_I |v\rangle = \lambda_v |v\rangle \quad (476)$$

dann

$$T^{-1}AT \underbrace{T^{-1}} |v\rangle = \lambda_v \underbrace{T^{-1}} |v\rangle \quad (477)$$

mit

$$|\tilde{v}\rangle = T^{-1} |v\rangle \quad : \quad (T^{-1}AT) |\tilde{v}\rangle = \lambda_v |\tilde{v}\rangle \quad (478)$$

Nun fehlt uns noch die genaue Form der Matrizen  $T$  und  $T^{-1}$ . Die Matrix  $T$  soll die folgende Wirkung bei der Transformation der Matrix  $A$  haben:

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \lambda_4 & \\ & & & & \lambda_5 \\ 0 & & & & & \ddots \end{pmatrix} = \text{Diagonalmatrix} \\ = \Lambda$$

Dies heißt Diagonalisieren.

Wir haben dann

$$\Lambda | \tilde{v} \rangle = \lambda_v | \tilde{v} \rangle \quad (479)$$

und alle Gleichungen sind hier **trivial** erfüllt! Die Spalten-Vektoren  $| \tilde{v} \rangle$ , die zu dieser Diagonalform als Eigenvektoren gehören, sehen offenbar so aus, dass alle Elemente 0 sind bis auf das  $v$ -te Element, welches 1 gesetzt werden kann (Normierung)!

Um auf die ursprünglich gesuchten Vektoren  $| v \rangle$  zu kommen, müssen wir wegen Gleichung (478) nur noch je einen Vektor  $| \tilde{v} \rangle$  mit der Matrix  $T$  multiplizieren:  $| v \rangle = T | \tilde{v} \rangle$ . Dabei sieht man sofort, dass die einzelne '1' in jedem der Vektoren  $| \tilde{v} \rangle$  (also das  $v$ -te Element des  $v$ -ten Vektors) bei dieser Multiplikation gerade die  $v$ -te Spalte der Matrix  $T$  als Eigenvektor  $| v \rangle$  zurückgibt. Die Spalten der Matrix  $T$  sind also einfach die Eigenvektoren zur Matrix  $A$ .

Die Matrix  $T$  muss für allgemeine Matrizen  $A$  mit dem Computer bestimmt werden. Wir wir aber schon im vorigen Kapitel gesehen haben, gibt es ganz Klassen von Matrizen  $A$ , für die man die Matrix  $T$  über einen Ansatz finden kann. Matrizen beispielsweise, die auf jeder Diagonalen jeweils konstante Zahlwerte stehen haben, werden durch den Ansatz  $T_{k,m} = \exp(iCkm)$  mit  $C = \text{const}$  diagonalisiert.

Der oft verlangte letzte Schritt 3), die Darstellung einer beliebigen Funktion (z.B. als Anfangsbedingung) durch Summe von Eigenvektoren, entspricht der Fourier-Transformation.

Wir nummerieren dazu jetzt die Eigenvektoren mit dem Index  $k$  anstatt  $v$  durch. Gesucht seien also Vorfaktoren  $\hat{y}(k)$  so, dass ein beliebiger Vektor (=eine beliebige Funktion)  $| y \rangle$  sich als Linearkombination von Eigenvektoren  $| k \rangle$  zur Matrix  $A$  darstellen lässt:

$$| y \rangle = \sum_k \hat{y}(k) | k \rangle \quad (480)$$

oder, explizit mit kontinuierlich vielen Vektorelementen geschrieben, die dann mit  $x$  durchnummeriert sind:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-ikx} \hat{y}(k) \quad (481)$$

wobei  $|k\rangle = e^{-ikx}$  ein Eigenvektor zu einer Matrix wie in Kapitel 14 diskutiert wurde ist. Statt einer Summe wie im diskreten Fall haben wir hier ein Integral.

Die **Fourier-Transformation**

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-ikx} \hat{y}(k) \quad (482)$$

kann man offenbar auch auffassen (diskretisieren!) als:

$$y(x) \sim \sum_k T^{-1}(x, k) \hat{y}(k) \quad (483)$$

als Multiplikation der  $T^{-1}$ -Matrix  $e^{-ikx}$  auf den Vektor  $\hat{y}(x)$ .

Die Rücktransformation

$$\hat{y}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{ikx} y(x) \quad (484)$$

entspricht einfach der Umkehrung

$$\hat{y}(k) \sim \sum_x T(k, x) y(x) \quad (485)$$

wobei

$$\sum_k T^{-1}(\tilde{x}, k) T(k, x) = \delta(\tilde{x} - x) \quad (486)$$

als delta-Funktion die ‘‘Einheitsmatrix‘‘ darstellt!

Wir haben es uns hier also ersparen können, die unbekannt Faktoren  $\hat{y}(k)$  über die Lösung eines linearen Gleichungssystems umständlich zu berechnen. Stattdessen hat die Multiplikation mit Eigenvektoren auf die  $y(k)$  in Gl.(485) die gesuchten Koeffizienten (=gesuchte Funktion)  $\hat{y}(k)$  ganz einfach herausprojiziert.

## 16 Fourier-Trafo an der Diffusions- bzw. Schrödinger-Gleichung

Wir nehmen unser Beispiel aus Kapitel 14, die Gleichung für Wärmeausbreitung in einem dünnen Stab, also die 1-dimensionale Diffusionsgleichung (bzw. Schrödinger-Gleichung!).

DGL:

$$\dot{y}(x, t) = Dy''(x, t) \quad (487)$$

Ansatz:

$$y(x, t) = y_0 e^{-\lambda t} e^{ikx} \quad (488)$$

Zur Erinnerung an Kapitel 10.2: Zwar ist unser Raum  $x$  im gewöhnlichen Sinne nur eindimensional. Wir betrachten hier aber die  $x$ -Werte als "Elemente" oder "Dimensionen" eines Vektors im (unendlich-) hochdimensionalen Funktionenraum. Eine Funktion  $y(x)$  wird somit als Vektor betrachtet, verschiedene  $x$ -Werte entsprechen verschiedenen Elementen des Vektors.

Hier verstehen wir also wieder  $k$  als den Index, der die Eigenvektoren "durchnummeriert", und  $x$  als den Index, der die Elemente eines Eigenvektors durchnummeriert, also:  $e^{ikx}$  = Eigen-"Vektor" Nr.  $k$ , Element Nr.  $x$  ( $e^{-iqx}$  = (Zeilen-)Eigenvektor bzw. Links-Eigenvektor, hermitesch konjugiert zu  $e^{ikx}$ ).

Einsetzen in die DGL ergibt:

$$-\lambda e^{-\lambda t} e^{ikx} = -Dk^2 e^{-\lambda t} e^{ikx} \quad (489)$$

( $-k^2$  = Eigenwert des Laplace-Operators  $\partial_x^2$  zum Eigenvektor  $e^{ikx}$ !) (analog:  $-\lambda$  = Eigenwert des  $\partial_t$ -Operators)

Spektrum also:

$$\lambda = Dk^2 \quad (490)$$

Ein "Eigen-Vektor" (bzw. Eigenfunktion) der DGL ist also:

$$y_k(x, t) = \hat{y}(k) e^{-Dk^2 t} e^{ikx} \quad (491)$$

$$\text{Kurz-Schreibweise} = \hat{y}(k) |k\rangle \quad (492)$$

und  $\hat{y}(k)$  = beliebige Amplitude mit "Index"  $k$  zum Eigenvektor  $\hat{y}(k) |k\rangle$ .

Das Eigenvektorsystem (links-rechts!) bildet eine vollständige Basis. Dies bedeutet anschaulich, dass die Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren so gross ist, dass man jede Funktion im Ortsraum (= Vektor in Ortsraumdarstellung) als Linearkombination (mit entsprechenden Vorfaktoren) aus Komponenten dieser Basis darstellen kann.

$$\text{Symbolisch} \quad |a\rangle_{(t)} = \sum_k \hat{y}(k) |k\rangle_{(t)} \quad (493)$$

Dies ist also ein ziemlich beliebiger Vektor bzw. eine beliebige Funktion, explizit geschrieben:

$$y(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{y}(k) e^{-Dk^2 t} e^{ikx} \quad (494)$$

Wie konstruieren wir nun die  $\hat{y}(k)$ ? Dies wurde schon am Ende des vorigen Kapitels erläutert:

Angenommen, zur Zeit  $t = 0$  soll der allgemeine Vektor  $|a\rangle_{t=0} \hat{=} y(x, t = 0)$  einen speziellen Wert (= spezielle Ortsfunktion) annehmen:

$$y(x, t = 0) = f(x) \quad \text{gegeben} \quad (495)$$

Symbolisch:

$$|f\rangle_o = \sum_k \hat{y}(k) |k\rangle_o \quad (496)$$

(Zeit  $t = 0$ ) explizit:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{y}(k) e^{ikx} \quad (497)$$

Dann bilde ich ein Skalarprodukt mit einem Links-Eigenvektor  $\langle q |$ :

$$\langle q | f \rangle_o = \sum_k \hat{y}(k) \langle q | k \rangle_o \quad (498)$$

und mit der **Orthogonalitätsrelation**

$$\langle q | k \rangle_o = \delta_{q,k} \quad \text{zur Zeit } t = 0 \text{ Ortho-Normal!} \quad (499)$$

$$\text{folgt :} \quad \langle q | f \rangle_o = \hat{y}(q) \quad (500)$$

Explizit:

$$\langle q | f \rangle_o = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-iqx} f(x) \quad (501)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx} e^{-iqx} \hat{y}(k) \quad (502)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dk 2\pi \delta(k - q) \hat{y}(k) \quad (503)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-iqx} f(x) = 2\pi \hat{y}(q) \quad (504)$$

Wir haben also:

$$y(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{y}(k) e^{-Dk^2 t} e^{ikx} \quad (505)$$

mit

$$\hat{y}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} y(x, t = 0) \quad (506)$$

als vollständige Lösung des in  $\pm x$ -Richtung unendlich ausgedehnten Systems mit Anfangswert  $y(x, t = 0)$ .

Die Relationen

$$y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{y}(k) e^{ikx} \quad (507)$$

$$\hat{y}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx y(x) e^{-ikx} \quad (508)$$

bezeichnet man als **Fourier-Transformation**. Sie stellt die Entwicklung einer Funktion  $y(x)$  nach ebenen Wellen  $e^{ikx}$  dar, mit Gewichtsfaktoren oder Amplituden  $\hat{y}(k)$ .

Beispiel für einen Anfangswert  $y(x, t = 0)$ , siehe Abb. (36) :

$$y(x, t = 0) = \delta(x)$$

Dann folgt:

$$\hat{y}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x) e^{-ikx} = \frac{1}{2\pi} \quad (509)$$

(= constant: Alle Wellen  $e^{ikx}$  sind mit gleicher Intensität vorhanden!)

Die zeitabhängige Lösung wird dann:

$$y(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{y}(k) e^{-Dk^2 t} e^{ikx} \quad (510)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-Dk^2 t} e^{ikx} \quad (511)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (512)$$

Gauss-Integral! (geht auch im Komplexen!)

Also:

$$y(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t D}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (513)$$

Eine scharf lokalisierte Anfangsverteilung  $y(x, t = 0) = \delta(x)$  zerfließt mit der Zeit!

Nochmals zur Erinnerung:

Kontinuitätsgleichung

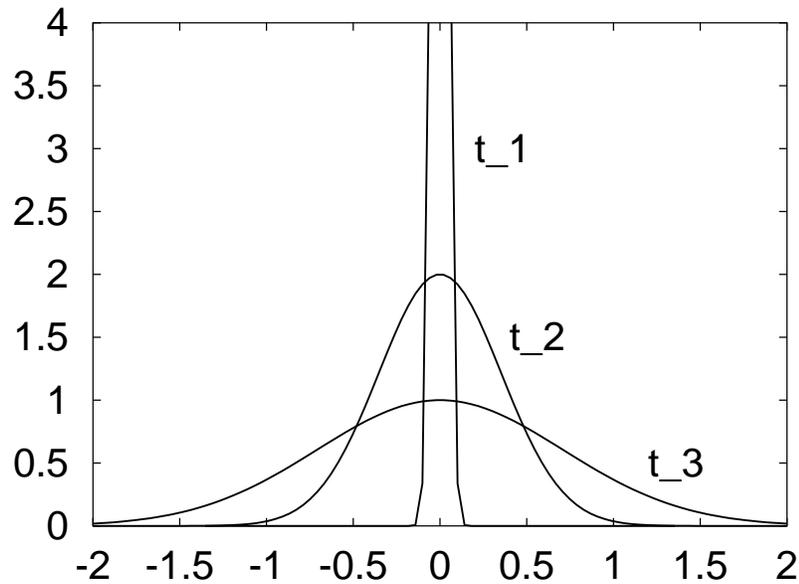


Abbildung 36: Diffusionsgleichung, schematisch. Die Fläche unter der Kurve (Gauss-Kurve) bleibt erhalten. Der Hügel wird mit der Zeit immer breiter und flacher. Die Zeit nimmt von  $t_1$  über  $t_2$  und  $t_3$  zu.

$$\partial_t y(x, t) + \operatorname{div} \vec{j}_y = 0 \quad (514)$$

Annahme:

$$\vec{j}_y \sim -D \nabla y = -D y'(x, t) \quad (515)$$

$$\rightarrow \dot{y}(x, t) = D y''(x, t) \quad (516)$$

Dies ist eine Gleichung, die viele verschiedene Phänomene beschreibt: Diffusion von Teilchen in einem Gas oder einer Flüssigkeit, Wärmeleitung in einer festen Substanz, freies Teilchen in der Quantentheorie (Schrödinger- Gl.)

$$\mathcal{H}_o \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi \quad ; \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \mathcal{H}_o \psi \quad (517)$$

(Die “Herleitung“ dieser Gleichung erfolgt allerdings aus anderen Prinzipien.)

## 17 Green’sche Funktion

In den letzten Kapiteln haben wir *homogene* partielle Differentialgleichungen gelöst. Oft kommen noch äussere Einflüsse hinzu in Form von additiven Inhomogenitäten  $f(x)$ . Beispiel:

$$\mathcal{L} \cdot y(x) = f(x) \quad ; \quad \text{mitz.B. :} \quad \mathcal{L} = \partial_x^2 y \quad (518)$$

$$y = \mathcal{L}^{-1} \cdot f(x) \quad (519)$$

$\mathcal{L}^{-1}$  ist die Green'sche Funktion zum Differentialoperator  $\mathcal{L}$ . Die Green'sche Funktion ist also die Inverse eines Differentialoperators, was auf ein Integral (mit sog. Integralkern) hinausführt. Wenn ich die Greensche Funktion zu einem Differentialoperator kenne, dann kann ich offenbar die inhomogene Differentialgleichung - also mit einer zusätzlichen äusseren Kraft  $f(x)$  - lösen.

Eigentlich sollte man meinen, dass das Invertieren einer Matrix einfacher ist, als das Diagonalisieren. Dies ist praktisch aber oft nicht der Fall.

Formale Bestimmung der Greenschen Funktion also durch Diagonalisierung des Operators  $\mathcal{L}$  zu einem Diagonal-Operator  $\Lambda$ :

$$\mathcal{L} T^{-1} T y = f \quad (520)$$

$$T \mathcal{L} T^{-1} T y = T f \quad (521)$$

$$\Lambda \cdot T y = T f \quad (522)$$

( $\Lambda =$  Diagonalmatrix  $= T \mathcal{L} T^{-1}$ )

$$T y = \Lambda^{-1} \cdot T f \quad (523)$$

trivial  $\Lambda$  zu bestimmen!

$$y = (T^{-1} \Lambda^{-1} T) \cdot f \quad (524)$$

Rücktrafo von  $\Lambda$ !

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}^{-1} & = & T^{-1} \Lambda^{-1} T \\ \Lambda & = & T \mathcal{L} T^{-1} \end{pmatrix} = \mathcal{L}^{-1} \cdot f \quad (525)$$

Somit ist mit

$$y = T^{-1} \Lambda^{-1} T f \quad (526)$$

das inhomogene Problem zumindest formal gelöst.

## 18 Residuensatz: Integrale lösen im Komplexen

Eine der wichtigsten Integrationsmethoden gründet sich auf gewisse Sätze aus der Theorie der Funktionen im Komplexen. Wir wollen hier nur als wichtiges Teilresultat die Integration von reellen Funktion  $f(x)$  über die ganze reelle Achse  $x$  betrachten.

Wir erweitern zunächst das reelle Argument  $x$  ins Komplexe, und nennen es dann zur Erinnerung "z". Weiterhin nehmen wir erst mal an, dass die (jetzt evtl. komplexe) Funktion  $f(z)$  nicht allzu exotische Eigenschaften habe.

Annahme also:  $f(z)$  = analytisch bis auf  $f(z_1), f(z_2)$ .

Als Vorübung versuchen wir zunächst, das folgende Linienintegral auf einem Kreis um den Ursprung in der komplexen Ebene zu lösen:

$$A_n = \oint_C dz z^n \quad (527)$$

mit dem Integrationsweg entlang einer geschlossenen Kontur  $C$  um den Ursprung  $z = 0$ , und zwar auf einem Kreisbogen mit Radius  $R$ . Der Exponent  $n = -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$  wird als ganzzahlig angenommen.

Nun ist ja  $z = Re^{i\phi}$  und wir können schreiben

$$dz = \frac{\partial z}{\partial R} dR + \frac{\partial z}{\partial \phi} d\phi = iRe^{i\phi} d\phi \quad (528)$$

wobei für festes  $R$  der Term mit  $dR$  wegfällt.

Damit wird das Integral zu

$$A_n = \oint_C dz z^n = iR^{n+1} \int_0^{2\pi} d\phi e^{i\phi(n+1)} \quad (529)$$

was sich trivial integrieren lässt, und wir erhalten

$$A_n = R^{n+1} \frac{1}{n+1} [e^{i2\pi(n+1)} - 1] \quad (530)$$

Dies ergibt für  $n \neq -1$  das Integral  $A_n = 0$  und, wie man aus der Gleichung davor leicht entnimmt, für  $n = -1$ :

$$A_{-1} = 2\pi i \quad (531)$$

Wir stellen also fest, dass offenbar nur der Term mit  $n = -1$  hier eine Rolle spielt, das Ergebnis ist dann auch von  $R$  unabhängig! Dieses wichtige Ergebnis lässt sich verallgemeinern, da das Resultat nicht von der Form des umlaufenden Integrationsweges abhängt, sondern nur davon, was für eine Singularität sich innerhalb des geschlossenen Gebietes befindet. Wir haben uns hier auf ganzzahlige  $n$  beschränkt, nichtganzzahlige Werte überschreiten den Rahmen dieser Vorlesung.

Nun können wir den hieraus folgenden "Residuensatz" verwenden, der sich am besten an Hand einer Skizze Abb.(37) erklären lässt.

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i (Res(f, z_1) + Res(f, z_2) + \dots)$$

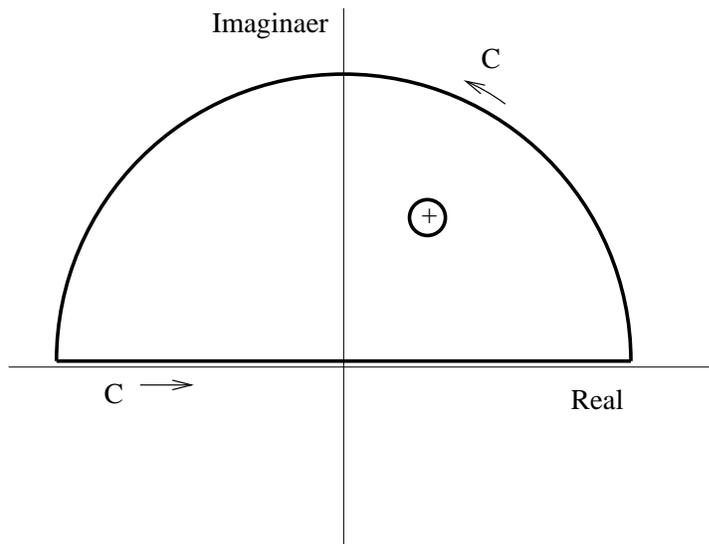


Abbildung 37: Umlaufintegral über den geschlossenen Weg 'C' in der komplexen Ebene  $z = x + iy$ . - Im Inneren des Gebietes befindet sich genau eine Singularität '+', also etwa eine Polstelle des Integranden. Das Integral über den geschlossenen Weg 'C' ist dann gleich dem Integral auf dem beliebig kleinen Umlauf-Kreis um diese Singularität. Dieses letztere Integral wird durch das Residuum der Funktion an dieser Singularität gegeben. - Falls sich keine Singularität innerhalb des geschlossenen Weges 'C' befindet, so ist das Umlaufintegral über 'C' gleich Null. - Das Integral entlang der ganzen reellen Achse wird selbst durch das Residuum der Singularität bestimmt, wenn wir zeigen können, dass das Teil-Integral auf dem Halbkreis (als ohne den Teil entlang der reellen Achse) gegen Null geht, falls der Radius des Halbkreises gegen unendlich geht.

$Res(f, z_1)$  ist das "Residuum" an der singulären Stelle  $z_1$  der Funktion  $f(z)$ . Hier ist angenommen, dass innerhalb des von 'C' eingefassten Gebietes nur **endlich viele isolierte Singularitäten** liegen!

Wenn wir wissen, wie die Residuen aussehen, können wir so ein Integral daher durch Zusammenzählen der Residuen ersetzen.

Der Residuensatz gilt, wenn man die Funktion  $f(z)$  in eine sog. Laurent-Reihe um  $z_1, z_2$  etc. entwickeln kann:

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{+\infty} a_k (z - z_1)^k \quad (532)$$

Das Residuum  $Res(f, z_1)$  ist dann:

$$Res(f, z_1) = a_{-1} \quad (533)$$

also die Konstante im Term  $f(z) = \dots + a_{-1} \frac{1}{(z-z_1)} + \dots$

Die praktische Berechnung eines Residuums z.B. an der Stelle  $z_o$  ist recht einfach:

1. Prüfen, ob  $g_m(z, z_o) := (z - z_o)^m f(z)$  für irgendein positiv ganzzahliges  $m$  im Limes  $g_m(z, z_o) = g_m(z_o, z_o)$  existiert und von 0 verschieden ist. Dann haben wir bei  $z_o$  einen Pol  $m$ -ter Ordnung.

2. Das Residuum ist dann

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_o} \frac{1}{(m-1)!} \left( \frac{d}{dz} \right)^{m-1} g_m(z, z_o) \quad \text{fertig!} \quad (534)$$

Beispiele für Residuen:

$$\begin{aligned} a) f(z) &= \frac{3}{z-i} & Res(f, z=i) &= 3 & ; & m=1 \\ b) f(z) &= \frac{3}{(z-i)^2} & Res(f, z=i) &= 0 & ; & m=2 \\ c) f(z) &= \frac{3z}{(z-i)^2} & Res(f, z=i) &= 3 & ; & m=2 \\ d) f(z) &= \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)} & Res(f, z=-1) &= -\frac{14}{25} & ; & m=2 \end{aligned} \quad (535)$$

Bei a), b), c) ist die Singularität bei  $z = i$ , bei d) ist eine doppelte Polstelle bei  $z = -1$  und je ein einfacher Pol bei  $z = \pm 2i$ .

Offensichtlich kann man hierdurch eine Vielzahl von **Integralen über rationale Funktionen** lösen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C dz \frac{p(z)}{q(z)} = 2\pi i \sum_k Res(f, z_k) \quad (536)$$

falls nur

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| \lesssim \frac{1}{|z|^{1+\epsilon}} \quad \text{mit } \epsilon > 0, \quad (537)$$

weil dann das Integral über den Kreisbogen "R" wegfällt! (für  $R \rightarrow \infty$ )

**\*\* Hier noch ein raffiniertes Beispiel:**

Beweis mit Residuensatz:

$$A = \int_0^\infty dx \frac{\log(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \pi \log 2 \quad (538)$$

Ansatz:

$$x^2 + 1 = (x + i)(x - i) \quad (539)$$

$$A = \int_0^\infty dx \frac{\log(x + i) + \log(x - i)}{(x + i) \cdot (x - i)} = A_+ + A_- \quad (540)$$

Betrachten wir:

$$B_+ = \oint_C dz \frac{\log(z + i)}{(z + i)(z - i)} \quad (541)$$

\*\*\* Abbildung fehlt noch \*\*\*

Contour  $C = C_1 + C_2$

Innerhalb von  $C$  liegt der **einfache Pol**  $z_o = i$ .

Residuum dort:

$$Res(f, z = i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{\log(z + i)}{(z + i)(z - i)} = \frac{\log(2i)}{2i} \quad (542)$$

Somit folgt:

$$B_+ = \oint_C dz \frac{\log(z + i)}{(z + i)(z - i)} = 2\pi i \frac{\log 2i}{2i} = \pi \log 2 + \frac{1}{2} \pi^2 i \quad (543)$$

(wegen  $\log 2i = \log 2 + \log i = \log 2 + \log e^{i\frac{\pi}{2}} = \log 2 + i\frac{\pi}{2}$ )

Auf dem Rand  $C_2$  ist der Integrand aber  $\sim \frac{\log R}{R^2}$  für große  $R$ . Multipliziert man das mit der Weglänge auf  $C_2$ , also mit  $\pi R$ , so bleibt immer noch  $\lim_{R \rightarrow \infty} \pi \frac{\log R}{R} = 0$ , also **kein** Beitrag vom Rand für  $R \rightarrow \infty$ !

Das zweite Integral  $B_- = \oint_C dz \frac{\log(z - i)}{(z + i)(z - i)}$  macht hier bei  $z = i$  ein Problem.

Aber:

$$\oint_C dz \frac{\log(z + i)}{(z + i)(z - i)} = \int_{-R}^{+R} dx \frac{\log(x + 1)}{x^2 + 1} = \pi \log 2 + \frac{1}{2} \pi^2 i \quad (544)$$

$$= \int_{-R}^0 dx \dots + \int_0^R dx \dots = \int_0^R dx \frac{\log(i - x) + \log(i + x)}{(x^2 + 1)} \quad (545)$$

Mit  $\log(i - x) + \log(i + x) = \log(1 + x^2) + \pi i$  und  $(\pi i) \cdot \int_0^R \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \cdot \pi^2 i$  ( $\lim R \rightarrow \infty$ ) folgt:

$$A = \pi \log 2 \quad . \quad (546)$$

**\*\* Noch ein Beispiel zum Residuensatz**

$$\oint_C f(z) dz \equiv 2\pi i \cdot \sum \text{Residuen innerhalb von } C$$

Idee:

$$\oint dz f(z) \rightarrow \oint dz \frac{g(z)}{z - z_1}$$

Residuum  $z_1 \rightarrow g(z_1)$  muß regulär sein bei  $z_1$ .

Beispiel:

$$A = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi}{a + b \cos \phi + c \sin \phi} \quad (547)$$

$$z = e^{i\phi} \quad ; \quad \phi = -i \log z \quad d\phi = -i \frac{dz}{z} \quad (548)$$

$$\cos \phi = \frac{1}{2} (z + z^{-1}) \quad \sin \phi = \frac{1}{2i} (z - z^{-1}) \quad (549)$$

$$A = -i \oint \frac{dz}{az + \frac{b}{2} (z^2 + 1) + \frac{c}{2i} (z^2 - i)} \quad (550)$$

\*\*\* Abbildung fehlt noch \*\*\*

Einheitskreis!

Setzen wir  $Q = \sqrt{a^2 - b^2 - c^2}$  dann wird der Nenner:

$$\frac{1}{2} (b - ic) z^2 + az + \frac{1}{2} (b + ic) = \quad (551)$$

$$\frac{1}{2} (b - ic) \cdot \left[ z - \frac{1}{b - ic} (-a + Q) \right] \cdot \left[ z - \frac{1}{b - ic} (-a - Q) \right] \quad (552)$$

Sei  $a^2 - b^2 - c^2 > 0$ , dann folgt:  $\left| \frac{1}{b - ic} (-a + Q) \right| < 1$  (liegt innerhalb des Einheitskreises!) also  $z_1 = (-a + Q)/(b - ic)$

Residuum bei  $z_1$ :

$$R_{z_1} = \frac{1}{\frac{1}{2} (b - ic) \cdot \left[ \underbrace{\frac{1}{(b - ic)} (-a + Q)}_{z_1} - \frac{1}{b - ic} (-a - Q) \right]} = \frac{1}{Q} \quad (553)$$

$$A = -i \cdot 2\pi i \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} \quad (554)$$

## 19 Wahrscheinlichkeitsrechnung

### Würfeln:

Nehmen wir an,  $P_2$  sei die Wahrscheinlichkeit, dass beim Wurf eines Würfels eine 2 nach oben zu liegen komme. Da die Wahrscheinlichkeiten für alle Zahlen von 1 bis 6 aber gleich sind (sein sollten, wenn der Würfel nicht manipuliert ist!), gilt:

$$P_i = \frac{1}{6} \quad \text{für jede Zahl} \quad (555)$$

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6$$

Das  $1/6$  kommt daher, dass die Summe aller Möglichkeiten in einem Wurf 1 ergeben muss, da irgendeine Zahl ja auf jeden Fall erscheint (wenn der Würfel nicht gerade auf einer Würfelkante zu liegen kommt):

$$\sum_i P_i = 1 \quad ! \quad ; \quad P_i > 0 \quad ! \quad (556)$$

Wahrscheinlichkeit für  $N$ -“Sechser“ in Folge:

$$P_6^{(N)} = P_6^N \quad (557)$$

Dies wirkt wie ein "Sieb": Nur wenn der erste Wurf schon erfolgreich war, muß ich über den zweiten nachdenken ...

Hier konnte eine Zufallsvariable  $X_i$  im  $i$ -ten Wurf nur einen der möglichen diskreten "Augen"-Werte von 1 bis 6 annehmen. Erlauben wir nun allgemeiner auch kontinuierliche Werte, etwa zwischen 0 und 1:

$$X_i = \text{Zufallsvariable: } 0 < X_i < 1 \quad (558)$$

Für jedes  $x = X_i$  gilt dann bei **gleicher** Wahrscheinlichkeit(sdichte) für alle Werte zwischen Null und eins:

$$\int_0^1 P(x) dx = 1 \quad (559)$$

mit  $P(x) = 1$  nunmehr als Wahrscheinlichkeits-**Dichte**.

Andere Wahrscheinlichkeits-Verteilung als Beispiel:  $y = y_i$ :

$$P(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-y^2). \quad (560)$$

Dies ist eine Gauss-Verteilung, welche im Prinzip beliebige Werte von  $y_i$  zulässt. Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 84 Prozent liegen diese Werte aber im Intervall  $-1 < y < +1$ , also in der Nähe von Null:

$$\int_{-1}^{+1} P(y) dy = 0.8427.. \quad (561)$$

Anwendungsformeln (für fast beliebige Verteilungen):

$$\begin{aligned}
 \text{Mittelwert :} \quad \bar{y} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad y_i \text{ aus Beobachtung!} \\
 \text{Erwartungswert :} \quad \langle y \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \\
 \text{Varianz :} \quad \sigma^2 &= \langle (y_i - \langle y \rangle)^2 \rangle \\
 \text{Naehung :} \quad \sigma^2 &\approx \frac{1}{N} \sum_i (y_i - \bar{y})^2 \\
 \text{Standardabweichung} \quad \sigma &= \sqrt{\sigma^2} \\
 &= \text{mittlerer Fehler}
 \end{aligned}$$

Kennt man die zu den  $y_i$  zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P(y)$  (siehe hier oben), so lässt sich ein **Erwartungswert** für eine fast beliebige Funktion  $f(y)$  berechnen als

$$\langle f(y) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dy P(y) f(y). \quad (562)$$

### Random Walk:

Wie aber rechnet man nun mit Zufallsvariablen, deren Wert man ja per definitionem gar nicht kennt?

Als Beispiel dient hier die torkelnde Wanderung eines 'Betrunkenen', der 'drunken mans walk' oder 'random walk': Sei  $\epsilon_i$  der  $i$ -te Schritt, der einfach entweder vorwärts (+1) oder rückwärts (-1) gehen kann, jeweils um 1 Einheitslänge.

Sei  $\epsilon_i \pm 1$  jeweils mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$ , also im Mittel soll der Trunkene genauso viele Schritte nach vorn wie nach hinten machen. Dann ist die Entfernung  $R(N)$  vom Ursprung nach  $N$  Schritten:

$$R(N) = \sum_{i=1}^N \epsilon_i$$

Was kann man ausrechnen?

$$\langle \epsilon_i \rangle = 0 \quad ; \quad \langle \epsilon_i \epsilon_j \rangle = \delta_{ij} \quad (563)$$

Die zentrale Aussage hier ist, dass, wenn  $i=j$  ist, natürlich der Erwartungswert  $\langle \epsilon_i \epsilon_j \rangle = 1$  sein muss. Falls  $i$  aber nicht gleich  $j$  ist, dann sollen die zwei  $\epsilon$ 's gar nichts miteinander zu tun haben, also unkorreliert sein!

Die Zufallsvariablen  $\epsilon_i$  sind hier als unabhängig angenommen.

$$\langle (R(N))^2 \rangle = \langle \sum_i \sum_j \epsilon_i \epsilon_j \rangle = \sum_i \sum_j \langle \epsilon_i \epsilon_j \rangle = \sum_i 1 = N \quad (564)$$

$$|\bar{R}| = \sqrt{\langle R^2 \rangle} = \sqrt{N} \quad ! \quad (565)$$

Um mit Zufallsvariablen  $\epsilon_i$  zu rechnen, versuchen wir also erst einmal, die Mittelwerte abzuziehen, so dass der Erwartungswert  $\langle \epsilon_i \rangle = 0$  Null ist. Dann versuchen wir, uns

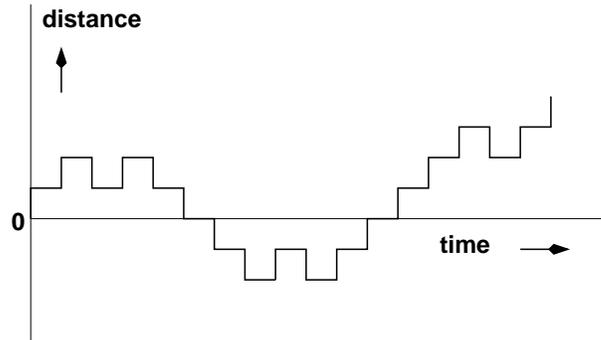


Abbildung 38: Random Walk: Bei jedem Zeitschritt (time) geht es entweder einen Schritt aufwärts oder abwärts (distance).

Aussagen über die Korrelationsfunktion  $G_{i,j} = \langle \epsilon_i \epsilon_j \rangle$  zu verschaffen, typischerweise von der Form

$$\langle \epsilon_i \epsilon_j \rangle = \Gamma \delta_{i,j} \quad (566)$$

so dass also alle Werte Null sind, wenn  $i$  ungleich  $j$  ist. Falls  $i = j$  ist steht dann ein Wert  $\Gamma$  für diese Korrelation. (Der Wert dieser Grösse  $\Gamma$  muss aus anderen physikalischen Überlegungen gewonnen werden). Dann werden die Gleichungen, in denen Zufallsvariable auftauchen, quadriert. Sodann werden diese Erwartungswerte formal gebildet und die  $\Gamma$ -Werte können eingesetzt werden. Dies ist die Grundlage für die Lösung vieler Einzelprobleme aus dem Bereich der Statistik und Thermodynamik.

## 20 Variationsrechnung

In den vorhergehenden Kapiteln wurde gezeigt, wie man Extremstellen von Funktionen finden kann, die von einer oder mehreren skalaren Variablen abhängen. Wir erinnern daran, dass dies etwa bei einer Funktion  $f(x, y)$  auf die Bedingung

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (567)$$

führte.

In der theoretischen Physik begegnet man sehr häufig dem Konzept, sogenannte *Funktionale* extremalisieren zu müssen. In gewisser Hinsicht entspricht das der Extremstellensuche einer Funktion von unendlich vielen Veränderlichen.

### 20.1 Funktionale

Ein Funktional ist eine Funktion, die einer Funktion eine Zahl zuordnet.

#### Beispiel

Angenommen, wir würden das Ausgangssignal eines Verstärkers beobachten. Solange kein Eingangssignal anliegt, werden wir nur ein Rauschen feststellen, die Ausgangsspannung  $U(t)$  als Funktion der Zeit  $t$  schwankt daher unregelmäßig um  $U = 0$ . Um die Güte des Verstärkers beurteilen zu können, definieren wir uns ein Maß für die Rauschstärke. Da es für uns unerheblich ist, ob das Ausgangssignal positiv oder negativ ist, gibt uns der Ausdruck  $U^2(t)$  ein Maß für das momentane Rauschen. Einen aussagekräftigeren Wert erhalten wir, wenn wir über ein Zeitintervall  $T$  mitteln:

$$R[U] := \frac{1}{T} \int_0^T U^2(t) dt. \quad (568)$$

Da die Ausgangsspannung  $U(t)$  eine Funktion ist und  $R[U]$  eine Zahl, haben wir ein *Funktional* im obigen Sinne definiert. Um anzudeuten, dass der Parameter  $U$  nicht nur eine bloße Zahl ist, schreiben wir ihn in eckigen Klammern.

#### Beispiel

Eine (glatte) Funktion  $y = f(x)$  sei im Intervall  $x \in [0 : 1]$  definiert. Wie lang ist diese Kurve zwischen den beiden Endpunkten? Wie man der Abbildung 39 entnimmt, hat ein Linienelement  $ds$  die Länge

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (dx > 0). \quad (569)$$

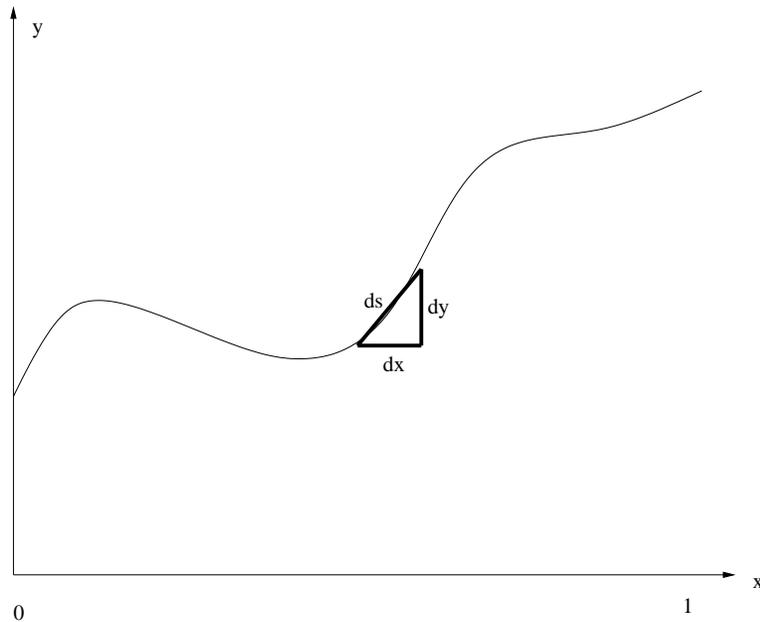


Abbildung 39: Bogenlängeenelement der Funktion  $y = f(x)$ .

Daher beträgt die gesamte Bogenlänge der Kurve

$$L[f] = \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (570)$$

$L[f]$  ist wiederum ein Funktional.

Die bereits erwähnte Extremalisierung von Funktionalen entspricht der Suche nach bestimmten Funktionen,  $U(x)$  bzw.  $f(x)$ , die den Wert  $R[U]$  bzw.  $L[f]$  extremal machen.

## 20.2 Funktionalableitungen

Zur Motivation der Herangehensweise betrachten wir zunächst eine beliebige Funktion  $g(x)$ , wobei  $x$  eine gewöhnliche reelle Variable sein soll. Ist an einer bestimmten Stelle  $x_0$  die Bedingung  $g'(x_0) = 0$  erfüllt, so spricht man von einem *stationären Punkt*, d.h. entweder ein Minimum, Maximum oder ein Sattelpunkt. Unter einem Extremum versteht man normalerweise speziell ein Minimum oder Maximum, aber wenn wir Funktionale extremalisieren wollen, so wollen wir auch (in einem geeigneten Sinne) Sattelpunkte zulassen. In den meisten Fällen wird man sehr leicht anschaulich entscheiden können, um welche Art von Extremum es sich bei einem Funktional handelt, doch ist das für viele Aspekte in der Physik nur von untergeordnetem Interesse. Wir wollen daher im Folgenden die Begriffe *stationär* und *extremal* synonym verwenden.

Die Stationaritätsbedingung  $g'(x_0) = 0$  kann auch anders gelesen werden: Wenn wir geringfügig an der Stelle  $x_0$  „wackeln“, also durch  $x_0 + \delta x$  ersetzen, so können wir nach

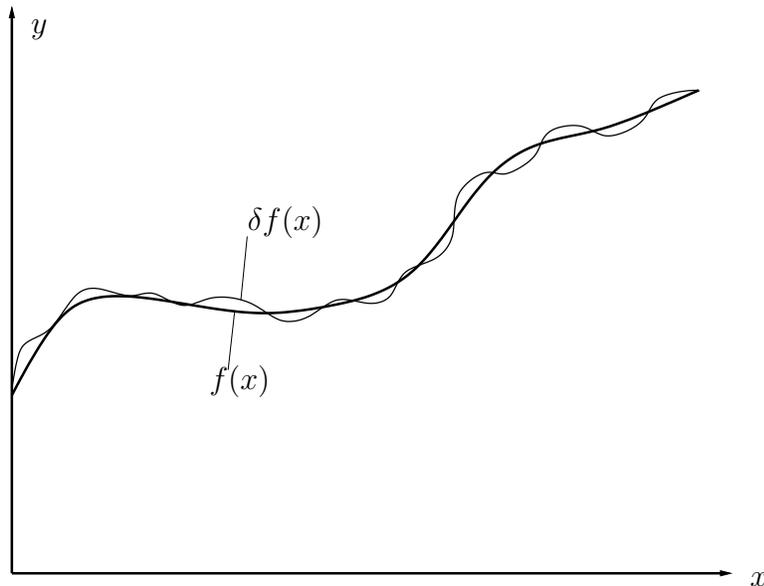


Abbildung 40: Virtuelle Verrückung der Funktion  $f(x)$ .

der Taylorsche Formel die Änderung des Funktionswertes  $g(x)$  ausdrücken als

$$g(x_0 + \delta x) - g(x_0) = g'(x_0)\delta x + \mathcal{O}(\delta x^2) = \mathcal{O}(\delta x^2). \quad (571)$$

Bei diesem „Wackeln“ um  $\delta x$  ändert sich also der Funktionswert bestensfalls in zweiter Ordnung in  $\delta x$ , was sehr klein ist, solange auch  $\delta x$  klein ist. Man nennt  $\delta x$  eine *virtuelle Verrückung*. Ein stationärer Punkt ist daher dadurch definiert, dass an ihm eine virtuelle Verrückung nur zu einer Veränderung des Funktionswertes in mindestens zweiter Ordnung in der Verrückung führt.

Bei Funktionalen ist die Vorgehensweise vollkommen analog. Angenommen, wir hätten eine Funktion  $f_0(x)$ , die das Funktional  $L[f]$  extremal macht. Bei der Bogenlänge wäre das zum Beispiel eine kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten. Nun „wackeln“ wir an dieser Funktion, d.h. wir addieren eine andere *Funktion*  $\delta f(x)$  dazu. Die Funktionswerte  $\delta f(x)$  sollen klein sein, s. Abb. 40. Dabei muß betont werden, dass die Verrückung (von der Kleinheit abgesehen) eine *beliebige* Funktion sein darf; insbesondere braucht sie nicht an allen Stellen den gleichen Wert zu haben!

Stationarität bedeutet dann in direkter Verallgemeinerung, dass sich das Funktional unter der Variation nur in zweiter (oder höherer) Ordnung in der virtuellen Verrückung  $\delta f(x)$  ändern darf. Dies läßt sich am Besten anhand von Beispielen erläutern:

### Beispiel

Wie suchen diejenigen Funktionen  $U(t)$ , die das „Rauschfunktional“  $R[U]$  extremal machen. Anschaulich ist klar, dass es keine Funktionen mit maximalem Rauschen geben kann, da eine Verdopplung der Amplitude den Wert des Funktionals vervierfacht und

damit immer noch erhöhen kann; genauso sind „Sattellösungen“ nicht möglich. Es ist aber völlig klar, dass eine Funktion  $U \equiv 0$  minimales Rauschen hat und auch das eindeutige Minimum des Funktionals darstellt. Wir wollen jetzt überprüfen, ob wir diesen Sachverhalt auch rechnerisch bestätigen können.

Wir wählen der Einfachheit halber  $T = 1$ . Angenommen,  $U(t)$  sei ein Extremum des Funktionals. Für eine kleine Störung  $\delta U(t)$  berechnen wir den Ausdruck  $R[U + \delta U] - R[U]$ :

$$\begin{aligned} R[U + \delta U] - R[U] &= \int_0^1 [(U(t) + \delta U(t))^2 - U^2(t)] dt, \\ &= 2 \int_0^1 U(t) \delta U(t) dt + \int_0^1 \delta U^2(t) dt. \end{aligned}$$

Im letzten Ausdruck ist der zweite Summand bereits von der Ordnung  $\delta U^2$ , so dass wir ihn für die Stationaritätsbedingung wie gewohnt unterdrücken können:

$$R[U + \delta U] - R[U] = \int_0^1 \{2U(t)\} \delta U(t) dt + \mathcal{O}(\delta U^2) \quad (572)$$

Die Argumentation ist nun wie folgt: Da die Störung  $\delta U(x)$  eine beliebige Funktion ist und Stationarität das Verschwinden des Integrals erfordert (da dies der Term erster Ordnung in  $\delta U(t)$  ist), ist dies nur dann möglich, wenn der Term in geschweiften Klammern Null ist. Denn wäre er auch nur in einem kleinen Bereich, sagen wir, positiv, so genügt es,  $\delta U(t)$  in diesem Bereich ebenfalls positiv zu wählen und sonst überall Null, und schon wäre das Integral von Null verschieden und das Funktional daher nicht stationär.

Man nennt den Ausdruck in den geschweiften Klammern auch *Variationsableitung* und schreibt

$$\frac{\delta R}{\delta U(t)} = 2U(t). \quad (573)$$

Man berechnet ihn im Prinzip immer so wie in unserem einfachen Beispiel, indem man den Ausdruck  $R[U + \delta U] - R[U]$  auf die Form

$$\boxed{R[U + \delta U] - R[U] = \int \frac{\delta R}{\delta U(t)} \delta U(t) dt + \mathcal{O}(\delta U^2)} \quad (574)$$

bringt und dann abliest.

Die Stationaritätsbedingung lautet dann

$$\boxed{\frac{\delta R}{\delta U(t)} = 0.} \quad (575)$$

In unserem Beispiel also  $U(t) = 0$  für alle  $t$ , genauso, wie wir es erwartet haben.

## Beispiel

Ein wenig komplizierter, aber immer noch anschaulich zu lösen ist das Problem der kürzesten Verbindung zwischen zwei Punkten. Vorgegeben sein Anfangspunkt  $(x = 0, y = y_0)$  und Endpunkt  $(x = 1, y = y_1)$ . Wir wissen, dass die Kurve mit minimaler Bogenlänge die gerade Verbindung zwischen diesen Punkten ist.

Wir berechnen wieder

$$L[f + \delta f] - L[f] = \int_0^1 \left[ \sqrt{1 + (f'(x) + \delta f'(x))^2} - \sqrt{1 + (f'(x))^2} \right] dx \quad (576)$$

in erster Ordnung in  $\delta f(x)$ . Zu diesem Zweck entwickeln wir die erste Wurzel; der Übersichtlichkeit halber schreiben wir vorübergehend  $a = f'(x)$  und  $b = \delta f'(x)$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + (a + b)^2} &= \sqrt{1 + a^2} + \left( \frac{\partial}{\partial b} \sqrt{1 + (a + b)^2} \right)_{b=0} b + \mathcal{O}(b^2) \\ &= \sqrt{1 + a^2} + \frac{ab}{\sqrt{1 + a^2}} + \mathcal{O}(b^2). \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt dann

$$L[f + \delta f] - L[f] = \int_0^1 \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \delta f'(x) dx. \quad (577)$$

Störend ist jetzt noch, dass  $\delta f$  als erste Ableitung auftritt. Um den Ausdruck auf die Gestalt (574) zu bringen, integrieren wir daher partiell:

$$L[f + \delta f] - L[f] = \left[ \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \delta f(x) \right]_{x=0}^1 - \int_0^1 \left( \frac{d}{dx} \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \right) \delta f(x) dx.$$

Wir fordern nun, dass die Verrückung  $\delta f(x)$  an den Randpunkten verschwinden soll; an diesen Stellen soll sie also nicht beliebig sein, sondern stattdessen  $\delta f(0) = \delta f(1) = 0$  erfüllen. Der Grund dafür ist, dass wir in unserer Aufgabenstellung die Anfangs- und Endpunkte, zwischen denen wir die kürzeste Verbindung suchen wollen, fest vorgegeben haben, insbesondere also auch deren  $y$ -Koordinaten. Wenn wir an einer gegebenen Funktion „wackeln“, so müssen wir darauf achten, diese Randbedingungen nicht zu verletzen, und deshalb muß  $\delta f(0) = \delta f(1) = 0$  sein. Nehmen wir beispielsweise an, es wäre  $y_0 = 0$  und  $y_1 = 1$ . Die Anschauung sagt uns dann als optimale Lösung  $f(x) = x$  voraus, mit der Bogenlänge  $L[f] = \sqrt{2}$ . Würden wir jetzt am rechten Endpunkt „wackeln“, so könnten wir ihn durch geeignete Wahl der Funktion  $\delta f(x)$  zum Beispiel auch bis  $y_1 = f(1) + \delta f(1) = 0$  herunterschieben, wodurch jetzt eine kürzere Verbindung mit Länge 1 möglich wäre. Das ist sicher nicht das, was wir wollen!

Wir schließen allgemein aus diesen Überlegungen:

Variationsprobleme erfordern typischerweise die Einhaltung von Randbedingungen. Diese sind durch die Problemstellung vorgegeben.

In der letzten Formel verschwindet dann der ausintegrierte Bestandteil und nur das Restintegral bleibt übrig:

$$\begin{aligned} L[f + \delta f] - L[f] &= - \int_0^1 \left( \frac{f''(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} - \frac{(f'(x))^2 f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}} \right) \delta f(x) dx \\ &= - \int_0^1 \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}} \delta f(x) dx. \end{aligned}$$

Als Variationsableitung lesen wir daher ab:

$$\frac{\delta L}{\delta f(x)} = - \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}. \quad (578)$$

Die Stationaritätsbedingung erfordert wieder das Verschwinden der Variationsableitung. Wir lernen an diesem Beispiel:

Variationsprobleme führen typischerweise auf Differentialgleichungen.

In unserem Beispiel vereinfacht sie sich auf  $f''(x) = 0$ , d.h.  $f(x) = \alpha x + \beta$ . Die Lösung ist also tatsächlich eine Gerade, wobei die Koeffizienten  $\alpha$  und  $\beta$  so zu wählen sind, dass die Randbedingungen erfüllt sind.

Die Variationsrechnung ist ein sehr wichtiges Werkzeug in der theoretischen Physik. Sie erleichtert zum Beispiel in der Mechanik das Aufstellen komplizierter Bewegungsgleichungen, die aus einem rein Newtonschen Ansatz nur sehr schwierig zu gewinnen wären. Wir haben allerdings schon an dem zweiten Beispiel gesehen, dass diese „Bewegungsgleichungen“ gewöhnlich Differentialgleichungen sind, die unter Umständen nur sehr kompliziert oder gar nicht mehr analytisch zu lösen sind.

Abschließend führen wir ein umfangreicheres Beispiel an, das die Mächtigkeit der Variationsrechnung verdeutlichen soll. Allerdings werden wir auch hier auf kompliziertere Gleichungen stoßen, die nur noch durch „gezieltes Raten“, also der Kenntnis des Endergebnisses, zu lösen sind. Also nicht abschrecken lassen!

### Beispiel: Notrutsche<sup>3</sup>

An Bord eines Flugzeugs ist nach der Landung ein Feuer ausgebrochen. Die Passagiere müssen über eine Notrutsche aussteigen, auf der sie reibungsfrei herabgleiten. Sie müssen dabei nicht nur den Höhenunterschied  $y_0$  bewältigen, sondern sollen sich aus Sicherheitsgründen auch noch horizontal um  $x_0$  vom Flugzeug entfernen (s. Abb. 41).

---

<sup>3</sup>Das Problem geht zurück auf die Gebr. Bernoulli und ist in der Literatur unter dem Namen Brachystochronenproblem geläufig.

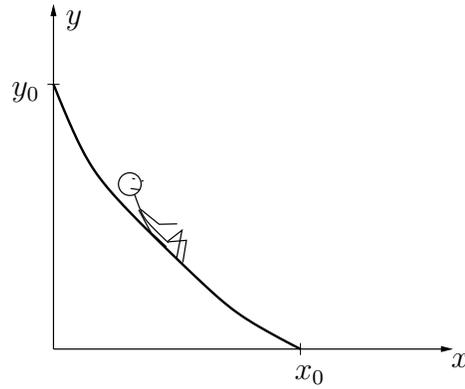


Abbildung 41: Passagier gleitet auf Rutsche.

Vor der Rutschpartie hat der Passagier die potentielle Energie  $W = mgy_0$  ( $g$  ist die Graviationsbeschleunigung). Auf der Rutschbahn setzt sich die Gesamtenergie aus kinetischer und potentieller Energie zusammen,  $W = 1/2mv^2 + mgy$ , wobei  $y = y(x)$  die gesuchte Rutschenform ist. Energieerhaltung liefert:

$$\begin{aligned} mgy_0 &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy, \\ g(y_0 - y) &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right], \\ (dt)^2 &= \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{2g(y_0 - y)}. \end{aligned}$$

Die gesamte Rutschzeit  $T$  beträgt dann

$$T[y] = \int_0^T dt = \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1 + (dy/dx)^2}{2g(y_0 - y(x))}} dx. \quad (579)$$

Um die minimale Rutschzeit bestimmen zu können, müssen wir das Variationsproblem

$$\frac{\delta T}{\delta y(x)} = 0 \quad (580)$$

lösen. Wir berechnen daher zunächst die Variationsableitung in der gewohnten Weise.

$$T[y + \delta y] - T[y] = \int_0^{x_0} \left\{ \sqrt{\frac{1 + (y'(x) + \delta y'(x))^2}{2g(y_0 - y(x) - \delta y(x))}} - \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{2g(y_0 - y(x))}} \right\} dx \quad (581)$$

Um diesen Ausdruck zu entwickeln, definieren wir der Einfachheit halber und um Verwirrung zu vermeiden, die Funktion

$$f(a, b) := \sqrt{\frac{1 + b^2}{2g(y_0 - a)}}, \quad (582)$$

wobei später  $a = y(x)$  und  $b = y'(x)$  soll. Bei der virtuellen Verrückung ändert sich  $a$  um  $da = \delta y(x)$  und  $b$  um  $db = \delta y'(x)$ . Der Integrand in (581) ist daher in erster Ordnung in  $\delta y(x)$  nichts anderes als das *totale Differential* von (582)

$$df = \frac{\partial f}{\partial a} da + \frac{\partial f}{\partial b} db,$$

wobei die obigen Bedeutungen von  $a, b, da$  und  $db$  einzusetzen sind. Wir berechnen:

$$df = \frac{b}{\sqrt{2g(y_0 - a)(1 + b^2)}} db + \frac{\sqrt{1 + b^2}}{2\sqrt{2g}(y_0 - a)^{3/2}} da$$

Also folgt:

$$\begin{aligned} T[y + \delta y] - T[y] &= \int_{x=0}^{x_0} \left\{ \frac{y'(x)}{\sqrt{2g[y_0 - y(x)][1 + (y'(x))^2]}} \right\} \delta y'(x) dx \\ &+ \int_{x=0}^{x_0} \left\{ \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{2\sqrt{2g}[y_0 - y(x)]^{3/2}} \right\} \delta y(x) dx + \mathcal{O}(\delta y^2) \end{aligned}$$

Um diesen Ausdruck auf die Form (574) zu bringen, wird das erste Integral partiell integriert. Ansonsten ist die weiter oben angewandte Argumentation, dass die Ausdrücke in den geschweiften Klammern beide verschwinden müssen, damit es keinen Beitrag erster Ordnung in  $\delta y$  gibt, nicht zulässig, weil  $\delta y$  und  $\delta y'$  nicht unabhängig voneinander variiert werden können.

Da die Endpunkte festgehalten sind, tritt wieder kein ausintegrierter Bestandteil bei der partiellen Integration auf.

$$\begin{aligned} T[y + \delta y] - T[y] &= \int_{x=0}^{x_0} \left\{ -\frac{d}{dx} \left( \frac{y'(x)}{\sqrt{2g[y_0 - y(x)][1 + (y'(x))^2]}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{2\sqrt{2g}[y_0 - y(x)]^{3/2}} \right\} \delta y(x) dx + \mathcal{O}(\delta y^2) \end{aligned}$$

Jetzt lesen wir als Variationsableitung den Ausdruck in den geschweiften Klammern ab:

$$\frac{\delta T}{\delta y(x)} = -\frac{d}{dx} \left( \frac{y'(x)}{\sqrt{2g[y_0 - y(x)][1 + (y'(x))^2]}} \right) + \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{2\sqrt{2g}[y_0 - y(x)]^{3/2}} \quad (583)$$

Die Stationaritätsbedingung lautet wie gewohnt

$$\frac{\delta T}{\delta y(x)} = 0. \quad (584)$$

Berechnen der darin enthaltenen Ableitung und Zusammenfassen der Ausdrücke führt dann sehr leicht auf die Differentialgleichung

$$\frac{1}{2} \left(1 + (y'(x))^2\right) = (y_0 - y(x)) y''(x). \quad (585)$$

Diese Gleichung beschreibt die Form der optimalen Rutsche. Unglücklicherweise ist sie sehr kompliziert und nur schwierig zu lösen.

Wir bemerken zunächst, dass (585) äquivalent zu der folgenden Differentialgleichung ist:

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2g(y_0 - y(x)) \left(1 + (y'(x))^2\right)} \right] = 0. \quad (586)$$

Der Nachweis dieser Äquivalenz ist sehr leicht und ist im Anhang an diesen Abschnitt erbracht. Der Vorteil von (586) ist, dass sich diese Gleichung sehr leicht integrieren läßt:

$$\frac{1}{2g(y_0 - y(x)) \left(1 + (y'(x))^2\right)} = \frac{1}{c^2}, \quad (587)$$

wobei wir die auftretende Integrationskonstante aus Gründen der später ersichtlichen Zweckmäßigkeit mit  $1/c^2$  bezeichnet haben.

Die Lösung dieser Gleichung ist in der Literatur bekannt, jedoch läßt sie sich nicht in expliziter Form  $y = y(x)$  darstellen. Stattdessen ist nur eine Parameterdarstellung  $x = x(\theta)$  und  $y = y(\theta)$  möglich, ähnlich den Polarkoordinaten.

Wir „raten“ die Lösung und überprüfen (wiederum im Anhang), dass sie tatsächlich die Differentialgleichung (586) erfüllt:

$$x = x(\theta) = \frac{c^2}{4g}(\theta - \sin \theta), \quad (588)$$

$$y = y(\theta) = y_0 - \frac{c^2}{4g}(1 - \cos \theta). \quad (589)$$

Diese Gleichungen beschreiben eine (gespiegelte und verschobene) *Zykloide*. Das ist die Bahnkurve, die ein Katzenauge an einem Fahrrad entlangläuft, das ohne zu gleiten über den Boden rollt (s. Abb. 42).

Die Lösung (588) und (589) ist so gewählt, dass sie die Randbedingung  $y(0) = y_0$  erfüllt. Die Integrationskonstante  $c$  ist derart zu bestimmen, dass auch  $y(x_0) = 0$  gilt. Es ergeben sich dann – abhängig vom Verhältnis  $y_0/x_0$  – zwei verschiedene Lösungsformen, die in Abbildung 43 dargestellt sind. Der zweite Fall ist sicherlich mit der normalen Landebahn nicht so leicht zu vereinbaren, weil die Rutsche zum Teil unterirdisch verläuft, aber er ist vom physikalischen Standpunkt verständlich: Durch den rasanten Fall am Anfang sogar unter die Nulllinie herab wird die Person sehr stark beschleunigt und kann dann sehr schnell die lange Strecke bis  $x_0$  zurücklegen; andererseits ist es nicht sinnvoll, die Kuhle noch tiefer zu machen, da dann die Rutschstrecke sehr stark zunimmt, was die Gleitzeit wieder erhöhen würde.

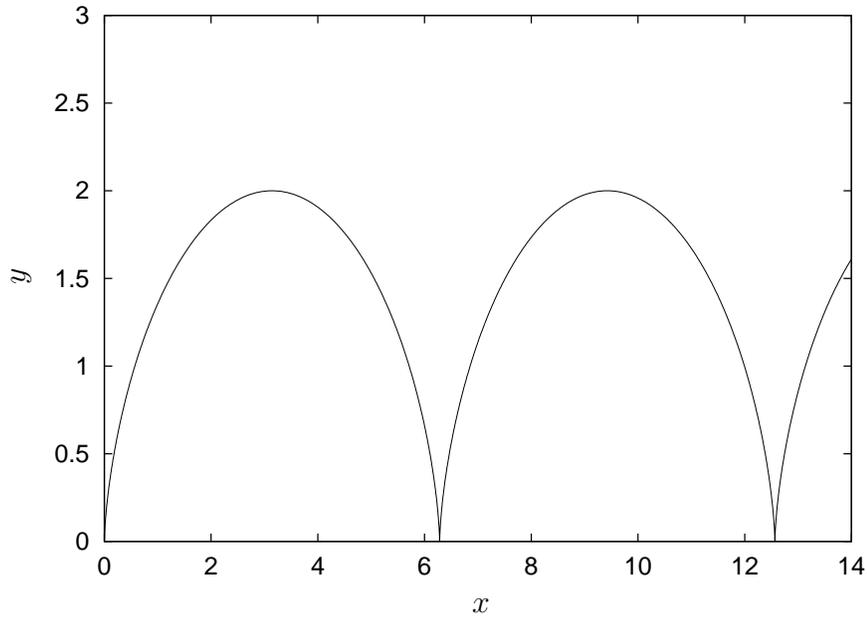


Abbildung 42: Zyklode:  $x(\theta) = \theta - \sin \theta$ ,  $y(\theta) = 1 - \cos \theta$

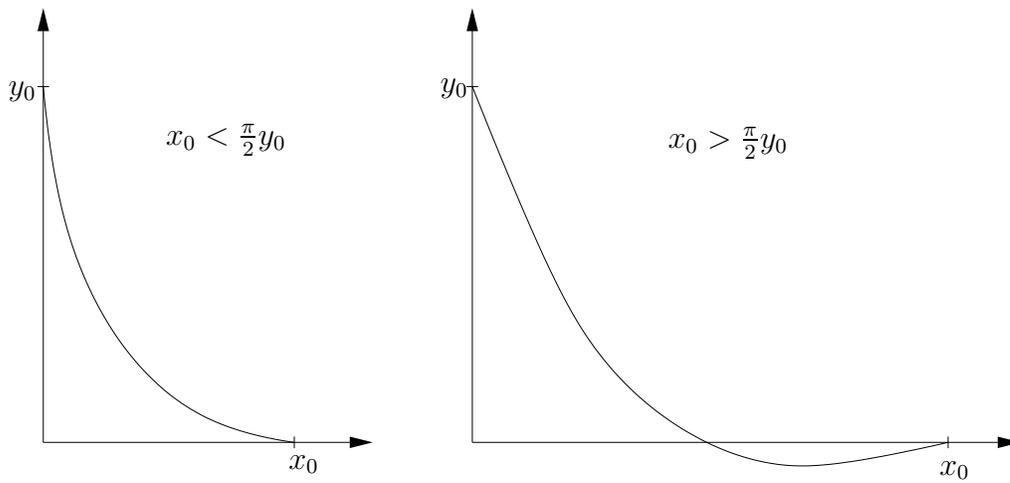


Abbildung 43: Die optimalen Rutschenformen

## 20.3 Anhang

### Nachweis der Äquivalenz von (585) und (586)

Wir berechnen die Ableitung in (586):

$$\frac{y'(x)}{2g(1+(y'(x))^2)(y_0-y(x))^2} - \frac{y'(x)y''(x)}{g(1+(y'(x))^2)^2(y_0-y(x))} = 0.$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner ergibt

$$y'(x)(1+(y'(x))^2) - 2y'(x)y''(x)(y_0-y(x)) = 0.$$

Division durch  $2y'(x)$  und Umordnen der Terme führt sofort auf (585), womit der Nachweis erbracht ist:

$$\frac{1}{2}(1+(y'(x))^2) = (y_0-y(x))y''(x).$$

### Nachweis der Richtigkeit der Lösung (588) und (589)

Wir drücken die in (587) enthaltene Ableitung über die Kettenregel aus:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \bigg/ \frac{dx}{d\theta}. \quad (590)$$

Aus (588) und (589) folgt

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= \frac{c^2}{4g}(1-\cos\theta), \\ \frac{dy}{d\theta} &= -\frac{c^2}{4g}\sin\theta, \end{aligned}$$

also

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}.$$

Setzt man dies in (587) ein, so folgt nach wenigen simplen Umformungen, dass diese Differentialgleichung durch die vermutete Lösung tatsächlich erfüllt wird.

*(N.B.: Dieses Kapitel wurde freundlicherweise von Robert Spatschek ausgearbeitet.)*

## 21 Anhang: Griechisches Alphabet

$A, \alpha$	Alpha
$B, \beta$	Beta
$\Gamma, \gamma$	Gamma
$\Delta, \delta$	Delta
$E, \epsilon, \varepsilon$	Epsilon
$Z, \zeta$	Zeta
$H, \eta$	Eta
$\Theta, \theta$	Theta
$I, \iota$	Iota
$K, \kappa$	Kappa
$\Lambda, \lambda$	Lambda
$M, \mu$	My
$N, \nu$	Ny
$X, \xi$	Xi
$O, o$	Omikron
$\Pi, \pi$	Pi
$R, \rho$	Rho
$\Sigma, \sigma$	Sigma
$T, \tau$	Tau
$Y, \upsilon$	Upsilon
$\Phi, \phi, \varphi$	Phi
$X, \chi$	Chi
$\Psi, \psi$	Psi
$\Omega, \omega$	Omega

## 22 Literatur

Alle Arten von Büchern über höhere Mathematik sind zur Unterstützung dieses Kurses geeignet. Hier ist eine Auswahl unterschiedlicher Bücher gegeben, die sich schon bewährt haben.

- R. Courant, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung; Springer Verlag, 1954; in 2 Bänden. Dies ist immer noch eine schöne und gut lesbare Einführung in die Mathematik.
- Nachschlagewerk Bronstein/Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik (Formelsammlung)  
Dort sind viele Regeln gesammelt, die irgendwo in Mathevorlesungen besprochen werden.
- Merziger/Wirth, *Repetitorium der Höheren Mathematik*, Binomi Verlag  
Enthält viele einfache durchgerechnete Beispiele und die dazu erforderlichen Regeln
- S. Großmann *Mathematischer Einführungskurs für die Physik*, Teubner  
Weniger Beispiele, aber ausführlichere Erklärungen der Methoden, ohne grössere mathematische Beweise.
- K.F. Riley, M.P. Hobson, S.J. Bence, *Mathematical Methods For Physics and Engineering*, Cambridge Univ. Press (Cambridge)
- Milton Abramowitz u. Irene Stegun, Pocketbook of Mathematical Functions, Harri Deutsch Verlag, Frankfurt 1984. - Hier sind die ganzen speziellen Funktionen versammelt, mit vielen Integralen und asymptotischen Entwicklungen. Sehr nützlich.
- C. Bender, S. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill Inc., New York 1978. In unserem Kurs beschränken wir uns fast ausschliesslich auf *lineare* Probleme. Dieses Buch liefert viele nützliche Beispiele dafür, wie man mit nicht mehr exakt lösbaren (meist nichtlinearen) Problemen umgeht, also mit verschiedenen Arten von Störungstheorie, z.B. WKB-Theorie und Multiple Scale Analysis.